Пример 6.4. Найти стационарные точки функционала

$$J(y)=\int_1^2\left[x(y')^2-8x^2y'+16xy-\frac{4}{x}y^2\right]dx.$$

④ Задача без ограничений. Составляем уравнение Эйлера $F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}=0$:

$$x^2y''+xy'+4y=16x^2.$$

Это уравнение Эйлера. Для его решения применяем стандартный алгоритм:

1. Решения однородного линейного уравнения ищем в виде $y=x^\lambda$.

   Характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$.

   Его корни $\lambda_1=-2i, \lambda_2=2i$.

   Соответствующее решение однородного уравнения $y_o=C_1\sin(2\ln x)+C_2\cos(2\ln x)$.

2. Частное решение ищем в виде $y_ч=ax^2$: $y_ч=2x^2$.

3. Общее решение неоднородного уравнения Эйлера (экстремаль)

   $y=C_1\sin(2\ln x)+C_2\cos(2\ln x)+2x^2$.

   Постоянные C_1 и C_2 находим из следующих граничных условий:

$$F'_{y'}\Big|_{x=1}=0,\ F'_{y'}\Big|_{x=2}=0.$$

   Т.к. $F'_{y'}=2xy'-8x^2=4C_1\cos(2\ln x)-4C_2\sin(2\ln x)$, то

$$\begin{cases} 4C_1=0, \\ -4C_2\sin(2\ln 2)=0, \end{cases}\quad \text{т.е. } C_1=0,\ C_2=0.$$

   Стационарная точка (допустимая экстремаль) $\hat{y}=2x^2$.

4. Исследование на экстремум.

Пусть $h\in C^1[1,2]$, $F'_{y'}\Big|_{x=1}=0$ и $F'_{y'}\Big|_{x=2}=0$. Рассмотрим $\Delta J=J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})$. Поскольку уравнение Эйлера превращается на рассматриваемой кривой $\hat{y}$ в верное равенство, то линейная по h часть приращения функционала равна нулю $(\delta J(\hat{y})=0)$. В этом можно при желании убедиться непосредственно, используя прием интегрирования по частям, граничные условия и уравнение Эйлера (на экстремали оно обращается в нуль). Следовательно,

$$\Delta J=\int_1^2\left(x(h')^2-\frac{4}{x}h^2\right)dx.$$

Полагая $h=\beta x^{\alpha}$, получаем $\Delta J=\beta^{2}\int\limits_{1}^{2}\left(x\left(\alpha x^{\alpha-1}\right)^{2}-\frac{4}{x}x^{2\alpha}\right)dx \;=\beta^{2}\int\limits_{1}^{2}\left(\alpha^{2}-4\right)x^{2\alpha-1}dx$, т.е. $\Delta J>0$ при $\alpha>2$ и $\Delta J<0$ при $\alpha<2$. При этом в силу произвольности выбора β $\forall\varepsilon>0\,\exists\beta>0:\|h\|=\|\beta x^{\alpha}\|<\varepsilon.$ То нет ни минимума, ни максимума. ❹