ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Основные понятия

Пусть M – некоторое множество функций.

Функционалом $J = J(y)$ называется переменная величина, зависящая от функции $y(x)$, если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому правилу поставлено в соответствие число.

Множество M функций $y(x)$, на котором определен функционал $J(y)$, называется его *областью определения*.

В приложениях часто встречаются функционалы вида

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{1.1}$$

где $F(x, y, p)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x \in [a, b]$ и $\forall (y, p) \in R^2_{(y,p)}$ ($R^2_{(y,p)}$ – плоскость с декартовыми прямоугольными координатами y, p).

Будем обозначать через $C^1[a, b]$ пространство всех *непрерывно дифференцируемых* на $[a, b]$ функций с *нормой* $\|y\| = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]}|y'(x)|$.

Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$ дает (*слабый локальный*) *минимум* функционала $J(y)$, если $\exists$ число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall y(x) \in M$, для которого $\|y(x) - \hat{y}(x)\| < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$.

Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$ дает (*слабый локальный*) *максимум* функционала $J(y)$, если $\exists$ число $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall y(x) \in M$, для которого $\|y(x) - \hat{y}(x)\| < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(y) \leq J(\hat{y})$.

2. Простейшая вариационная задача

Простейшей вариационной задачей называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1.1) в классе непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A\,,\ y(b) = B\,. \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1. Если функция $\hat{y}(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то она на $[a,b]$ необходимо удовлетворяет *уравнению Эйлера*:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (2.2)$$

(здесь $\dfrac{d}{dx}$ – полная производная по x).

Экстремалью называется всякое решение уравнения Эйлера (2.2).

Решение уравнения Эйлера (2.2) (экстремаль), удовлетворяющее поставленным граничным условиям, называется *допустимой экстремалью*.

3. Задача со свободным концом (концами)

Пусть функционал (1.1) рассматривается при граничном условии

$$y(a) = A\,. \qquad (3.1)$$

Тогда говорят, что $x = a$ – *закрепленный* конец, $x = b$ – *свободный* конец.

Задачей со свободным концом называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1.1) в классе непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условию (3.1).

Теорема 3.1. Если функция $\hat{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом $x = b$, то она на $[a,b]$ необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера (2.2) и граничному условию при $x = b$ (на свободном конце) вида

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\left(b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right) = 0 . \tag{3.2}$$

Если функционал $J(y)$ рассматривается при граничном условии

$$y(b) = B , \tag{3.3}$$

то $x = a$ – свободный конец.

Теорема 3.2. Если функция $\hat{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом $x = a$, то она на $[a, b]$ необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера (2.2) и граничному условию при $x = a$ (на свободном конце) вида

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\left(a, \hat{y}(a), \hat{y}'(a)\right) = 0 . \tag{3.4}$$

Если граничных условий не ставится (то есть оба конца свободны), то $\hat{y}(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера (2.2) и граничным условиям (3.2), (3.4).

4. Литература.

1. *Ипатова В.М., Пыркова О.А., Седов В.Н.*. Дифференциальные уравнения. Методы решений: - Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012. (§4)
2. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. (Гл. 9 §1, 2, 3).
3. *Сборник* задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /Под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. (Гл. 6 §19, 20).
4. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1985. (Гл. 6 §1, 2, 3).
5. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007. (Гл. 3 §11).