Решение уравнения Эйлера

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{4.1}$$

где $x \in [a,b]$ – независимая переменная; $y(x)$ – искомая функция; $f(x)$, $a_0(x)$, $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ – заданные на $[a,b]$ функции, причем $\forall x : x \in [a,b]$ функция $a_0(x) \neq 0$.

Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида $a_k(x) = b_k x^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, где $b_0, b_1, \ldots, b_n$ - заданные числа, причем $b_0 \neq 0$:

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} x y' + b_n y = f(x). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. Заменой $x = e^t$ $(t = \ln x)$ (4.2) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Доказательство.

○ Действительно, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) =$

$$= e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Допустим, что *k*-я производная имеет вид

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}\left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^k}\left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ - постоянные.

Тогда (*k*+1)-я производная будет равна

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right) = e^{-(k+1)t}\left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k|+1}} + (\alpha_1 - k)\frac{d^k y}{dt^k} + \ldots - k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^{k+1}}\left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k|+1}} + (\alpha_1 - k)\frac{d^k y}{dt^k} + \ldots - k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right). \; \bullet$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y = e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y = x^{\lambda}$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (4.2). Поскольку $x^k \frac{d^k x^{\lambda}}{dxk} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$ при $k \le \lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\ldots+b_{n-2}\lambda(\lambda-1)+b_{n-1}\lambda+b_n=0. \qquad (4.3)$$

Лемма 4.1. Каждому простому корню λ уравнения (4.3) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^{λ}; каждому действительному корню λ кратности l $(l \ge 2)$ соответствует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера x^{λ}, $x^{\lambda}\ln x$, ... , $x^{\lambda}(\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta} = e^{i\beta\ln x}$, таким образом, паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ уравнения (4.3) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$ и $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$.

Литература.

1. *Ипатова В.М., Пыркова О.А., Седов В.Н.*. Дифференциальные уравнения. Методы решений: - Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012. (§4)
2. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. (Гл. 9 §1, 2, 3).
3. *Сборник* задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /Под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. (Гл. 6 §19, 20).
4. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1985. (Гл. 6 §1, 2, 3).
5. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007. (Гл. 3 §11).