

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Дифференциальные уравнения**

Курс **2**

Семестр **4**

2017–2018 учебный год

Фамилия студента _____ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = -2e^{-x} + 4(x+2)e^x + 2x.$$

2. ③ Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 11y + 28z \\ \dot{y} = -2x - 9y - 19z \\ \dot{z} = y + z \end{cases} \quad (\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -2).$$

3. ③ Найти все положения равновесия системы, определить их характер и нарисовать фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x^4 - y^2 - 1), \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y). \end{cases}$$

4. ④ Исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_1^2 \left[x^5 (y')^2 + \frac{5}{2} x^4 y y' + 10x^3 y^2 - 10x^3 y \right] dx, \quad y(1) = 6, \quad y(2) = 11.$$

5. ④ Найти все решения уравнения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые

$$y = xy' - e^{y'}.$$

6. ④ Найти все решения уравнения

$$(x^2 + 8x)y'' - (2x + 8)y' + 2y = x(x + 8)^2, \quad x > 0.$$

7. ④ Найти общее решение уравнения

$$y^4 \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + (y^4 e^x - 2x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши $u = z$ при $y = 0, x > 0$.

8. ④ Решить задачу Коши

$$y'' \cos^5 y + 4(y')^2 \sin y \cos^4 y - 2(y')^4 \sin y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

9. ③ Показать, что каждое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + (3 - 2x - x^2)y = 0$$

имеет на \mathbb{R} не более 5 нулей.

МФТИ — 81

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С положением ознакомлен: _____ (Подпись студента)

Вариант 1

1. ④ $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + x^2 e^{-x} + x e^x + x^2 - 4x.$

2. ③ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \left(t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

3. ③ $(1; 0)$ – седло, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(-1; 0)$ – устойчивый узел, $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. ④ Уравнение Эйлера $2x^5 y'' + 10x^4 y' - 10x^3 y = -10x^3$, $y(x) = C_1 x + C_2 x^{-5} + 1$, $\hat{y}(x) = 5x + 1$,
 $\Delta J = \int_1^2 (x^5 (\eta')^2 + 5x^3 \eta^2) dx \geq 0$ – абс. минимум.

5. ④ $y = x \ln C - C$, $C > 0$,

$y = x \ln x - x$ – особое решение, $x > 0$, $x_0 = C$.

6. ④ $y = C_1 x^2 + C_2 (x + 4) + \frac{1}{2} x^3 + 4x^2 \ln x - 2x^2.$

$C'_1 = \frac{x+4}{x}$, $C'_2 = -x$

7. ④ $u = F\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}y^5, z - e^x + 2y\right) = F(I_1, I_2)$, $u_0 = e^{\sqrt{2I_1}} + I_2.$

8. ④ $y(x) = \operatorname{arctg} x.$

ИНСТРУКЦИЯ

по проверке экзаменационной контрольной работы
по курсу «Дифференциальные уравнения»
(2 курс, 4 семестр, 2017/2018 уч.г.)

Оценка отдельных задач		
1(4)	Найдено общее решение однородного уравнения	1 балл
	За каждое правильно найденное частное решение из 3-х возможных	1 балл
2(3)	За каждый правильно найденный собственный или присоединенный вектор	0,5 балла
	Выписано общее решение системы	1,5 балла
3(3)	За каждое верно исследованное положение равновесия (линеаризованная СУ, тип, рис.)	1,5 балла
4(4)	Правильно составлено уравнение Эйлера	1 балл
	Найдена допустимая экстремаль	2 балла
	Правильно проведено исследование на экстремум	1 балл
	Если при правильном исследовании на экстремум не написано, из какого класса функций берётся приращение	снять 0,5 балла
5(4)	Правильно найдены все решения уравнения	1,5 балла
	Правильно найдена дискриминантная кривая	0,5 балла
	Правильно установлено, что решение является особым	1 балл
	Правильный рисунок	1 балл
6(4)	Подобрано частное решение уравнения	0,5 балла
	Правильно найдено общее решение однородного уравнения	1,5 балла
	Правильно записана система для вариации постоянных	1 балл
	Правильно найдено общее решение неоднородного уравнения	1 балл
7(4)	Правильно найден только один первый интеграл	1 балл
	Правильно найден 2-й независимый первый интеграл и выписано общее решение	2 балла
	Правильно решена задача Коши	1 балл
8(4)	Правильно понижен порядок уравнения, получено уравнение Бернулли	1 балл
	Правильно найдено общее решение уравнения Бернулли	1,5 балла
	Решена задачи Коши (найден первая константа, проинтегрировано уравнение 1-го порядка, найдена вторая константа)	1,5 балла
9(3)	Верно применена теорема Штурма на бесконечных промежутках	1,5 балла
	Верно применена теорема Штурма на конечном промежутке	1,5 балла