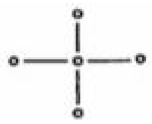
Численно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \end{cases}$

используя метод простой итерации.

Во внутренних узлах производные заменяем разностными соотношениями:

$$\frac{u_{m+1\,n} - 2u_{m\,n} + u_{m-1\,n}}{h_1^2} + \frac{u_{m\,n+1} - 2u_{m\,n} + u_{m\,n-1}}{h_2^2} = f_{mn}. \qquad (1)$$

Шаблон - схема "крест":  .

Уравнение (1) аппроксимирует дифференциальное с порядком $O(h_1^2, h_2^2)$.

Положим $h_1 = h_2 = h$ и перепишем разностное уравнение (1) в виде

$$u_{m+1\,n} + u_{m-1\,n} + u_{m\,n+1} + u_{m\,n-1} - 4u_{m\,n} = f_{mn} h^2. \qquad (2)$$

Замечание 1. Число уравнений точно равно числу внутренних узлов разностной сетки. Оно может быть достаточно велико: так при $M = N = 100$ оно достигает нескольких тысяч. При этом каждое уравнение системы содержит лишь 5 неизвестных: $u_{m+1\,n}, u_{m-1\,n}, u_{m\,n+1}, u_{m\,n-1}, u_{m\,n}$. Всего неизвестных $\approx M \cdot N$. Таким образом, матрица системы оказывается сильно разреженной. Для численного решения систем с сильно разреженными матрицами лучше подходят итерационные методы решения.

А уравнение (2) запишем в виде

$$u_{m\,n} = \frac{1}{4}\left(u_{m+1\,n} + u_{m-1\,n} + u_{m\,n+1} + u_{m\,n-1} - f_{mn} h^2\right). \qquad (3)$$

Замечание 2. При $f(x, y) \equiv 0$ видно, что значение функции в центральной точке шаблона "крест" $u_{m\,n}$ есть среднее арифметическое значений функций в четырех соседних узлах $u_{m+1\,n}, u_{m-1\,n}, u_{m\,n+1}, u_{m\,n-1}$. Уравнение $u_{m\,n} = \frac{1}{4}\left(u_{m+1\,n} + u_{m-1\,n} + u_{m\,n+1} + u_{m\,n-1}\right)$ можно интерпретировать как разностный аналог теоремы о среднем для гармонических функций.

Организуем итерационный процесс

$$u_{m\,n}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{m+1\,n}^{(k)} + u_{m-1\,n}^{(k)} + u_{m\,n+1}^{(k)} + u_{m\,n-1}^{(k)} - f_{mn} h^2\right), \qquad (4)$$

здесь для обозначения номера итерации используется верхний индекс.

Надо еще задать начальное приближение $u_{m\,n}^{(0)}$. В литературе[1] доказывается, что итерационный процесс сходится при любом начальном приближении независимо от шага сетки h. С практической точки зрения желательно, чтобы начальное приближение было как можно ближе к точному решению. Для такого приближения, опираясь на теорему о среднем, в качестве $u_{m\,n}^{(0)}$ можно взять интерполяцию на сеточную область значений функции в граничных узлах.

[1] см. Самарский. Теория разностных схем.

Обычно итерационный процесс проводят по строкам или столбцам - организация итерационного процесса не имеет принципиального значения.

Скорость сходимости невелика: число итераций $K = 0.2 \cdot M \cdot N \cdot \ln\frac{1}{\varepsilon}$, где ε - требуемая точность.

Замечание 3. Если расчетная область является прямоугольником $D = \{(x,\ y):\ x \in [a,\ b],\ y \in [c,\ d]\}$, то граничные условия принимают вид

$u_{0\,n} = \varphi_{0\,n}$, $u_{M\,n} = \varphi_{M\,n}$ при $n = \overline{0, N}$;

$u_{m\,0} = \varphi_{m\,0}$, $u_{m\,N} = \varphi_{m\,N}$ при $m = \overline{0, M}$.