Численно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \end{cases}$

Во внутренних узлах производные заменяем разностными соотношениями:

$$\frac{u_{m+1\,n} - 2u_{m\,n} + u_{m-1\,n}}{h_1^{\;2}} + \frac{u_{m\,n+1} - 2u_{m\,n} + u_{m\,n-1}}{h_2^{\;2}} = f_{mn}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) аппроксимирует дифференциальное с порядком $O\left(h_1^{\;2}, h_2^{\;2}\right)$.

Уравнения (1) и значения u_{mn} в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решив которую получим численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Замечание 1. Число уравнений точно равно числу внутренних узлов разностной сетки. Оно может быть достаточно велико: так при $M = N = 100$ оно достигает нескольких тысяч. При этом каждое уравнение системы содержит лишь 5 неизвестных: $u_{m+1\,n}, u_{m-1\,n}, u_{m\,n+1}, u_{m\,n-1}, u_{m\,n}$. Всего неизвестных $\approx M \cdot N$. Таким образом, матрица системы оказывается сильно разреженной.

Замечание 2. Если расчетная область является прямоугольником $D = \{(x,\ y) : x \in [a,\ b],\ y \in [c,\ d]\}$, то граничные условия принимают вид

$u_{0\,n} = \varphi_{0\,n}$, $u_{M\,n} = \varphi_{M\,n}$ при $n = \overline{0, N}$;

$u_{m\,0} = \varphi_{m\,0}$, $u_{m\,N} = \varphi_{m\,N}$ при $m = \overline{0, M}$.