Представьте алгоритм численного решения уравнения Лапласа с помощью итерационного метода расщепления (продольно-поперечная схема). Оцените количество арифметических действий, необходимое в случае использования сетки $10^3 \times 10^3$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Стационарную краевую задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$, $u\big|_\Gamma = \varphi(x,y)$ можно считать предельной для эволюционной начально-граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x,y),\ u\big|_\Gamma = \varphi(x,y),\ u(x,y,0) = u^0(x,y).$$

Зная, что одним из эффективнейших методов решения задач теплопроводности с двумя пространственными переменными, является **метод переменных направлений** (Писмэна-Речфорда), запишем соответствующие этому двухслойному методу формулы применительно к рассматриваемой задаче Дирихле для уравнения Пуассона:

на первом этапе находится промежуточное значение $u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ как решение системы уравнений

$$\frac{u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} - u_{mn}^{(k)}}{\tau} = \Lambda_{xx} u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \Lambda_{yy} u_{mn}^{(k)} + F_{mn}; \qquad (1)$$

на втором этапе решается система уравнений

$$\frac{u_{mn}^{(k+1)} - u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\tau} = \Lambda_{xx} u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \Lambda_{yy} u_{mn}^{(k+1)} + F_{mn}. \qquad (2)$$

Замечание 1. Главной особенностью, отличающей применение метода переменных направлений к стационарным задачам, является то, что здесь шаги по времени (которое в записи стационарного уравнения явно отсутствует) следует расценивать как итерационные шаги, т.е. индекс k означает не номер слоя пространственно-временной сетки, а интерпретируется как номер итерации (чтобы подчеркнуть это, заключаем его в скобки). В связи с этим к такому методу применяют название **итерационный метод переменных направлений**.

Записывая уравнения (1), (2) в виде

$$\left(E - \tau\Lambda_{xx}\right) u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \left(E + \tau\Lambda_{yy}\right) u_{mn}^{(k)} + \tau F_{mn}, \qquad (3)$$

$$\left(E - \tau\Lambda_{yy}\right) u_{mn}^{(k+1)} = \left(E + \tau\Lambda_{xx}\right) u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \tau F_{mn}, \qquad (4)$$

убеждаемся в том, что для нахождения $u_{mn}^{(k+1)}$ необходимо решить две системы уравнений:
первую с матрицей $\left(E - \tau\Lambda_{xx}\right)$ и
вторую с матрицей $\left(E + \tau\Lambda_{yy}\right)$.

Замечание 2. Таким образом метод (1), (2) целесообразно применять лишь тогда, когда матрицы $\left(E - \tau\Lambda_{xx}\right)$ и $\left(E + \tau\Lambda_{yy}\right)$ гораздо легче обратить, чем исходную матрицу $\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}\right)$.

В нашем случае – случае разностных аппроксимаций уравнений эллиптического типа – системы (3), (4) можно решить последовательным применением одномерных прогонок сначала по направлению x, затем по направлению y.

Для оценки количества арифметических действий проведем исследование сходимости **продольно-поперечный метода** (3), (4).

Погрешности $z_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = u_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} - u_{mn}$ и $z_{mn}^{(k+1)} = u_{mn}^{(k+1)} - u_{mn}$, где u_{mn} решение сходной системы $\Lambda_{xx}u_{mn} + \Lambda_{yy}u_{mn} = f_{mn}$, удовлетворяют уравнениям

$$\left(E - \tau\Lambda_{xx}\right)z_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \left(E + \tau\Lambda_{yy}\right)z_{mn}^{(k)}, \qquad (5)$$

$$\left(E - \tau\Lambda_{yy}\right)z_{mn}^{(k+1)} = \left(E + \tau\Lambda_{xx}\right)z_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}, \qquad (6)$$

из которых можно легко исключить промежуточное значение $z_{mn}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ и получить уравнение, связывающее только $z_{mn}^{(k)}$ и $z_{mn}^{(k+1)}$:

τ [1].

Уравнение для погрешности запишем в виде:

$$z_{mn}^{(k+1)} = \left(E - \tau\Lambda_{yy}\right)^{-1}\left(E - \tau\Lambda_{xx}\right)^{-1}\left(E + \tau\Lambda_{xx}\right)\left(E + \tau\Lambda_{yy}\right)z_{mn}^{(k)}$$

или

$$z_{mn}^{(k+1)} = Sz_{mn}^{(k)},$$

где

$$S = \left(E - \tau\Lambda_{yy}\right)^{-1}\left(E - \tau\Lambda_{xx}\right)^{-1}\left(E + \tau\Lambda_{xx}\right)\left(E + \tau\Lambda_{yy}\right).$$

Оператор S является самосопряженным, т.к. Λ_{xx} и Λ_{yy} - самосопряженные перестановочные операторы.

Любое собственное число оператора S можно представить в виде

$$\lambda_{pq} = \frac{\left(E + \tau\lambda_p\left(\Lambda_{xx}\right)\right)\left(E + \tau\lambda_q\left(\Lambda_{yy}\right)\right)}{\left(E - \tau\lambda_p\left(\Lambda_{xx}\right)\right)\left(E - \tau\lambda_q\left(\Lambda_{yy}\right)\right)},$$

где $\lambda_p\left(\Lambda_{xx}\right)$[2] собственные числа оператора Λ_{xx}, а $\lambda_q\left(\Lambda_{yy}\right)$[3] сосвенные числа оператора Λ_{yy}, т.е.

$$\lambda_{pq} = \frac{\left(E - \tau\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{\pi p h_x}{2X}\right)\left(E - \tau\frac{4}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi q h_y}{2Y}\right)}{\left(E + \tau\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{\pi p h_x}{2X}\right)\left(E + \tau\frac{4}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi q h_y}{2Y}\right)}. \qquad (7)$$

---

[1] $\Lambda_{xx}\Lambda_{yy} = \Lambda_{yy}\Lambda_{xx}$

[2] $\lambda_p\left(\Lambda_{xx}\right) = -\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{\pi p h_x}{2X}$

[3] $\lambda_q\left(\Lambda_{yy}\right) = -\frac{4}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi q h_y}{2Y}$.

Из (7) видно, что при $\tau > 0$ все собственные числа λ_{pq} не превосходят по модулю единицу. Следовательно, $\|S\| = \max\limits_{p,q} |\lambda_{pq}|$<1 и метод (1), (2) сходится.

Для собственных чисел оператора Лапласа справедливы оценки:

$$0 < l \approx \left(\frac{\pi}{X}\right)^2 \le -\lambda(\Lambda) \le L \approx \frac{4}{h^2}.$$

Введем обозначение $\mu(\tau) = \max\limits_{\lambda \in [l,L]} \left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right|$.

Чтобы обеспечить наиболее быструю сходимость надо минимизировать коэффициент $\mu(\tau)$: найдем оптимальное значение параметра τ, обеспечивающее $\min\limits_{\tau} \mu(\tau)$. Для этого решим задачу $\tau = \arg\left\{\min\limits_{\tau}\left[\max\limits_{\lambda \in [l,L]}\left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right|\right]\right\}$. Т.к. функция $y = \frac{1-x}{1+x}$ монотонна[4], то (простой графический анализ функции y приводит к результату) $\max\limits_{\lambda \in [l,L]}\left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right| = \max\left\{\left|\frac{1-\tau l}{1+\tau l}\right|, \left|\frac{1-\tau L}{1+\tau L}\right|\right\}$. При этом минимум $\mu(\tau)$ достигается при $\frac{1-\tau_o l}{1+\tau_o l} = -\frac{1-\tau_o L}{1+\tau_o L}$. Откуда $(1-\tau_o l)(1+\tau_o L) = (\tau_o L - 1)(1+\tau_o l)$, т.е. $1 + \tau_o(L-l) + \tau_o{}^2 lL = -1 + \tau_o(L-l) - \tau_o{}^2 lL$ или $\tau_o{}^2 = \frac{1}{lL}$ и $\tau_o = \frac{1}{\sqrt{lL}}$.

При этом $\mu(\tau_0) = \dfrac{1-\sqrt{\dfrac{l}{L}}}{1+\sqrt{\dfrac{l}{L}}} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{l}{L}}$. $\|S\| \le (\mu(\tau_0))^2 = \rho_0$ $\approx \left(1 - 2\sqrt{\frac{l}{L}}\right)^2$, так что $\left\|z^{(k+1)}\right\| \le \rho_0 \left\|z^{(k)}\right\|$ - погрешность за одну (двухэтапную) итерацию убывает в $\rho_0 = (\mu(\tau_0))^2 \approx 1 - 4\sqrt{\frac{l}{L}}$ раз; кроме того, справедлива оценка $\left\|z^{(k+1)}\right\| \le \rho_0{}^k \left\|z^{(0)}\right\|$. Для достижения заданной точности $\varepsilon = \rho_0{}^k$, пролологорифмируем последнее выражение: $\ln\varepsilon = k\ln\rho_0 = k\ln\left(1 - 4\sqrt{\frac{l}{L}}\right) \approx -k4\sqrt{\frac{l}{L}}$, откуда число итераций, необходимое для достижения заданной точности $k = \sqrt{\frac{L}{l}}\,\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{4}$.

---

[4] $y' = \dfrac{-1\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2} < 0$

Для рассматриваемой задачи $\varepsilon = 10^{-4}$. Допустив, что $X = Y = 1$, получаем $l = \pi^2$, при $M = N = 10^3$ $L = 4 \cdot \left(10^3\right)^2$ и $k = \sqrt{\frac{L}{l}}\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{4} = \frac{2 \cdot 10^3}{\pi}\frac{4\ln 10}{4} = \frac{2 \cdot 10^3}{\pi}\ln 10 \cong 1466.$

За одну итерацию совершается примерно ($2 \cdot 5 \cdot 10^3$ операций умножения и деления) $2 \cdot 8 \cdot 10^3$ арифметических действий, т.е. всего 23453939 арифметических действий.