§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1.1. Основные понятия

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathrm{R}$ – независимая переменная; $y(x)$ – искомая функция; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные числа, причем $a_0 \neq 0$; $f(x)$ – известная функция, не равная тождественно нулю. Уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1.2}$$

называется однородным.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1.1) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (1.2) и любого частного решения неоднородного уравнения (1.1):

$$y(x) = y_о(x) + y_ч(x). \tag{1.3}$$

1.2. Общее решение однородного уравнения

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (1.2) называется совокупность *n* линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ этого уравнения.

Общее решение однородного уравнения (1.2) представляет собой произвольную линейную комбинацию частных решений, входящих в фундаментальную систему решений,

$$y_о = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{1.4}$$

Далее мы будем рассматривать уравнения с действительными коэффициентами, их решения будем искать в действительной форме.

Характеристическим уравнением, соответствующим однородному уравнению (1.2), называется алгебраическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.5}$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения (1.5), вообще говоря, комплексные.

1.1) Каждому действительному простому корню λ характеристического уравнения (1.5) соответствует частное решение однородного уравнения (1.2), имеющее вид $y = e^{\lambda x}$.

1.2) Каждому действительному корню λ кратности k $(k \geq 2)$ соответствует k линейно независимых частных решений однородного уравнения $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ... , $x^{k-1}e^{\lambda x}$. Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (1.2) имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)e^{\lambda x}, \tag{1.6}$$

где C_1, C_2, …, C_k – произвольные постоянные.

1.3) Если $\lambda = \alpha + i\beta$, где α и β – действительные, $\beta \neq 0$, а $i^2 = -1$, является корнем характеристического уравнения (1.5), то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также корень этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами).

Напомним, что для комплексного числа $z = x + iy$, где $x, y \in \mathrm{R}$, его действительной и мнимой частью называются соответственно $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Кроме того, имеет место формула Эйлера $e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos \beta t + i \sin \beta t\right)$.

Паре невещественных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствуют два линейно независимых действительных частных решения однородного уравнения (1.2) $\operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые включают в фундаментальную систему решений, вместо функций $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$. Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (1.2) представляется в виде

$$y(x) = \left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)e^{\alpha x}, \tag{1.7}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

1.4) Если среди корней характеристического уравнения (1.5) есть корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности k $(k \ge 2)$, то и комплексно сопряженный ему корень $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ имеет ту же кратность k. Этим $2k$ невещественным корням соответствуют $2k$ линейно независимых частных действительных решений однородного уравнения (1.2)

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Соответствующая компонента общего решения однородного уравнения (1.2) имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} y(x) = &\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ &+\left(D_1 + D_2 x + \ldots + D_k x^{k-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}, \tag{1.8}$$

где C_1, C_2, …, C_k, D_1, D_2, …, D_k – произвольные постоянные.

Так можно построить совокупность решения, являющуюся общим решением уравнения (1.2).

1.3. Частное решение неоднородного уравнения с правой частью специального вида

Пусть правая часть $f(x)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом, т.е. является суммой функций вида

$$g(x) = e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\varphi x + Q_n(x)\sin\varphi x\right),$$

здесь $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

В этом случае для поиска частного решения неоднородного дифференциального уравнения можно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

1.5) Пусть правая часть уравнения (1.1) имеет вид $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ – многочлен степени m.

Если γ не является корнем характеристического уравнения (1.5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (1.1) ищется в виде

$$y_ч = Q_m(x)e^{\gamma x}, \tag{1.9}$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m.

Если γ является корнем (1.5) кратности s, то говорят, что имеет место резонанс кратности s; частное решение (1.1) ищется в виде

$$y_ч = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}. \tag{1.10}$$

Для определения коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ следует (1.9) или (1.10) подставить в (1.1), сократить на $e^{\gamma x}$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. Из получившейся системы алгебраических уравнений найдем эти коэффициенты.

1.6) Пусть коэффициенты левой части уравнения (1.1) действительны, а его правая часть имеет вид $f(x) = e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\varphi x + Q_n(x)\sin\varphi x\right)$.

Если $\gamma + i\varphi$ не является корнем характеристического уравнения (1.5), то говорят, что имеет место нерезонансный случай; частное решение неоднородного уравнения (1.1) ищется в виде

$$y_ч = \left(R_p \cos\varphi x + T_p \sin\varphi x\right)e^{\gamma x},$$
(1.11)

где $p = \max\{m,\ n\}$ – наибольшей из степеней многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$, R_p и T_p – многочлены степени не выше p.

Если $\gamma + i\varphi$ является корнем (1.5) кратности s, то говорят, что имеет место резонанс кратности s; частное решение (1.1) ищется в виде

$$y_ч = x^s\left(R_p \cos\varphi x + T_p \sin\varphi x\right)e^{\gamma x}.$$
(1.12)

Чтобы найти коэффициенты многочленов R_p и T_p, надо подставить (1.11) или (1.12) в уравнение (1.1), приравнять коэффициенты при подобных членах и решить полученную систему алгебраических уравнений.

Если правая часть уравнения (1.1) представима в виде суммы нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_l(x)$, то частное решение неоднородного уравнения (1.1) состоит из суммы частных решений y_i неоднородных уравнений

$$a_0 y_k^{(n)} + a_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_k' + a_n y_k = f_k(x) \quad \left(k = \overline{1,l}\right).$$

1.4. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 1.1. (1-01). Найти действительные решения уравнения

$$y^{IV} + 4y'' = 8e^{2x} + 8x^2.$$

① Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y^{IV} + 4y'' = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$.

$\lambda_{1,2}=0$ (кратности два) соответствуют частные решения $y_1=e^{0x}=1$ и $y_2=xe^{0x}=x$, корням $\lambda_{3,4}=\pm 2i$ – решения $y_3=\cos 2x$ и $y_4=\sin 2x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$$y_o=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x)=8e^{2x}+8x^2$, т.е. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=8e^{2x}$, $f_2(x)=8x^2$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x)=8e^{2x}=P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x)=8$, т.е. $m=0$, $\gamma=2$. Таких корней у характеристического уравнения нет, следовательно, кратность корня $s=0$. Т.о. частное решение ищем в виде $y_{ч_1}(x)=ae^{2x}$.

Подставляя $y_{ч_1}(x)=ae^{2x}$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_1(x)$, получаем

$$16ae^{2x}+4\cdot 4ae^{2x}\left(=32ae^{2x}\right)=8e^{2x}.$$

Приравнивая коэффициенты при e^{2x}, имеем

$$32a=8,\ a=\frac{1}{4} \text{ и } y_{ч_1}=\frac{1}{4}e^{2x}.$$

$f_2(x)=8x^2=8x^2e^{0x}=P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x)=8x^2$, следовательно $m=2$, $\gamma=0$ (что соответствует $\lambda_{1,2}=0$) – резонансный случай, кратность корня $s=2$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2}=x^2Q_2e^{0x}=x^2\left(ax^2+bx+c\right)$.

Подставляя $y_{ч_2}=ax^4+bx^3+cx^2$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)\equiv f_2(x)$, получаем

$$24a+4\left(12ax^2+6bx+2c\right)=8x^2 .$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях x, имеем

$x^2: \quad 48a \quad =8,$

$x^1: \quad 24b \quad =0,$ это дает $a=\dfrac{1}{6}$, $c=-3a=-\dfrac{1}{2}$ и

$x^0: \quad 24a+8c \quad =0;$

$$y_{ч_2}=x^2\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(x)=y_{ч_1}(x)+y_{ч_2}(x)=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{2} .$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=y_o+y_ч=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{2}$$ ❶

Пример 1.2. (1-14). Найти действительные решения уравнения

$$y'''+3y''+y'-5y=10e^x-5x .$$

② Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'''+3y''+y'-5y=0 .$$

Составляем характеристическое уравнение:

$\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-5=0$.

Корень $\lambda_1=1$ – угадываем. $\left(\lambda^2+4\lambda+5\right)(\lambda-1)=0$ дает $\lambda_{2,3}=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm i$.

Корню характеристического уравнения $\lambda_1=1$ соответствует частное решение $y_1=e^x$, корням $\lambda_{2,3}=-2\pm i$ – решения $y_2=e^{-2x}\cos x$ и $y_3=e^{-2x}\sin x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$$y_o=C_1e^x+C_2e^{-2x}\cos x+C_3e^{-2x}\sin x ,$$

где C_1, C_2, C_3 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x)=10e^x-5x$, т.е. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=10e^x$, $f_2(x)=-5x$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов:

$f_1(x)=10e^x=P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x)=10$, т.е. $m=0$, $\gamma=1$ (что соответствует $\lambda_1=1$) – резонансный случай, кратность корня $s=1$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_1}=x^1Q_0e^x=xae^x$.

Подставляя $y_{ч_1}(x)=axe^x$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)=f_1(x)$, получаем

$10ae^x=10e^x$.

Приравнивая выражения при одинаковых функциях, имеем

$10a=10$, $a=1$ и $y_{ч_1}=xe^x$.

$f_2(x)=-5x=-5xe^{0x}=P_m(x)e^{\gamma x}$, $P_m(x)=-5x$, т.е. $m=1$, $\gamma=0$ (таких корней у характеристического уравнения нет), т.е. кратность корня $s=0$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2}=x^0Q_1e^{0x}=ax+b$.

Подставляя $y_{ч_2}=ax+b$ в исходное дифференциальное уравнение при $f(x)\equiv f_2(x)$, получаем $0+3\cdot 0+a-5(ax+b)=-5x$. Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем $\begin{array}{ll} x^1: & -5a=-5, \\ x^0: & a-5b=0; \end{array}$ это дает $a=1$, $b=\frac{1}{5}a=\frac{1}{5}$ и $y_{ч_2}=x+\frac{1}{5}$.

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч(x)=y_{ч_1}(x)+y_{ч_2}(x)=xe^x+x+\frac{1}{5}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=y_o+y_ч=C_1e^x+C_2e^{-2x}\cos x+C_3e^{-2x}\sin x+xe^x+x+\frac{1}{5}.$$ ❷

Пример 1.3. (1-24). Найти все действительные решения уравнения $y''' + 4y'' + y' + 4y = 34\sin x + \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$.

③ Исходное уравнение неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y''' + 4y'' + y' + 4y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = -4$, $\lambda_{2,3} = \pm i$.

$\lambda_1 = -4$ соответствует частное решение $y_1 = e^{-4x}$, корням $\lambda_{2,3} = \pm i$ – решения $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos x$.

Общее решение однородного уравнения в действительной форме

$y_o = C_1 e^{-4x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x$,

где C_1, C_2, C_3 – действительные произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения.

В нашем случае $f(x) = 34\sin x + \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 34\sin x$, $f_2(x) = \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$.

$f_1(x) = 34\sin x = e^{\gamma x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$, $P_m(x) = 0$, $Q_n(x) = 34$, $p = \max\{m, n\} = 0$, $\gamma + \beta i = i$ – корень характеристического уравнения резонансный случай, кратность корня $s = 1$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_1}(x) = x(a\sin x + b\cos x)$. Подставляя $y_{ч_1}(x) = x(a\sin x + b\cos x)$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) = f_1(x)$, получаем $8(a\cos x - b\sin x) - 2(a\sin x + b\cos x) = 34\sin x$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$, имеем

$\cos x: \quad 8a - 2b = 0,$ $\quad$ это дает $\quad a = -1,$ $\quad$ и
$\sin x: \quad -8b - 2a = 34;$ $\quad\quad b = -4$

$y_{ч_1} = -x\sin x - 4x\cos x$.

$$f_2(x) = \left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x} = P_m(x)e^{\gamma x}, \ P_m(x) = 34x + \frac{13}{4}, \text{ т.е. } m = 1,$$

$\gamma = 4$ не является корнем характеристического уравнения, кратность корня $s = 0$, поэтому частное решение ищем в виде $y_{ч_2} = x^0 Q_1 e^{4x} = (ax + b)e^{4x}$.

Подставляя $y_{ч_2} = (ax + b)e^{4x}$, в исходное дифференциальное уравнение при $f(x) \equiv f_2(x)$, получаем

$$48a + 64(ax + b) + 32a + 64(ax + b) + a + 4(ax + b) + 4(ax + b) = 34x + \frac{13}{4}.$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях, имеем

$x^1: \quad 136a = 34,$
$x^0: \quad 136b + 81a = \frac{13}{4};$ $\quad$ это дает $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$ и

$$y_{ч_2} = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2} = -x\sin x - 4x\cos x + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right)e^{4x}.$$

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_о + y_ч = C_1 e^{-4x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x -$$
$$-x\sin x - 4x\cos x + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{4x}. ❸$$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Найти все действительные решения уравнений:

1. (1-01) $y^{IV} + 4y'' = 8e^{2x} + 8x^2$.
2. (1-02) $y^{IV} - y''' = \sin x + e^x$.

3. (1-03) $y^{IV} - y = 2e^x + 5e^x \sin x$.

4. (1-04) $y^{IV} + y''' - y'' - y' = 2x + 2\sin x$.

5. (1-11) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 6e^x + x$.

6. (1-12) $y''' - y'' - y' + y = x^2 + 4e^x$.

7. (1-13) $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 2e^{-x} + 5x + 4$.

8. (1-14) $y''' + 3y'' + y' - 5y = 10e^x - 5x$.

9. (1-21) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 60\cos 3x + 4xe^{-x}$.

10. (1-22) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 8\sin 2x + 20xe^x$.

11. (1-23) $y''' - 9y'' + y' - 9y = 164\sin x + `18xe^{3x} + \frac{11}{36}e^{-9x}$.

12. (1-24) $y''' + 4y'' + y' + 4y = 34\sin x + `\left(34x + \frac{13}{4}\right)e^{4x}$.

13. (1-31) $y''' - 3y' - 2y = 18(1 - x)e^{-x} + 100\cos 2x$.

14. (1-32) $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = (1 - 26x)e^{3x} + 30\cos 3x$.

15. (1-33) $y''' + 3y'' - 4y = 18(1 - x)e^{-2x} + 40\cos 2x$.

16. (1-34) $y''' + y'' + 16y' + 16y = (34x - 4)e^{-x} + 30\sin x$.

17. (1-41) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 8\cos 2x$.

18. (1-42) $y'' + y = \sin x \sin 2x$.

19. (1-43) $y'' - 2y' + y = e^{-x}\sin x + 4e^x$.

20. (1-44) $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + \cos x$.

21. (1-51) $y''' - y'' + y' - y = 4\cos x - (4x - 14)e^{-x}$.

22. (1-52) $y''' + y'' - y' - y = 4\sin x + 8(x + 1)e^x$.

23. (1-53) $y''' - y'' - y' + y = 4\cos x + 4(x - 4)e^{-x}$.

24. (1-54) $y''' + y'' + y' + y = 4\sin x + 2(x + 1)e^x$.

25. (1-61) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x \sin^2 x$.

26. (1-62) $y''' - 2y'' + y' = 6xe^x + 4\,\mathrm{sh}\, x$.

27. (1-63) $y'' - y' - 2y = 10e^{2x} \cos^2 \dfrac{x}{2}$.

28. (1-64) $y''' + 2y'' + y' = 16 \operatorname{ch} x - 6xe^{-x}$.

1.6. Ответы

1. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + x^2\left(\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{4} e^{2x}$.

2. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + xe^x + \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

3. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \dfrac{1}{2} xe^x - e^x \sin x$.

4. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 xe^{-x} + C_4 e^x + 2x - x^2 + \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

5. $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 x^2 e^x + x^3 e^x - x - 3$.

6. $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-x} + x^2 + 2x + 4 + x^2 e^x$.

7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos xe^{-2x} + C_3 \sin xe^{-2x} + xe^{-x} + x - 1$.

8. $y = C_1 e^x + C_2 \cos xe^{-2x} + C_3 \sin xe^{-2x} + xe^x + x + \dfrac{1}{5}$.

9. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3 e^x - \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{7}{50}\right) e^{-x} - x(3 \cos 3x + \sin 3x)$.

10. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x + \left(2x - \dfrac{9}{5}\right) e^x - \dfrac{2}{5} x(2 \sin 2x + \cos 2x)$.

11. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^{9x} + 9x \cos x - x \sin x +$
$+(-0.3x + 0.13)e^{3x} - \dfrac{11}{72 \cdot 738} e^{-9x}$.

12. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x - x \sin x - 4x \cos x + \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}\right) e^{4x}$.

13. $y = (C_1 x + C_2) e^{-x} + C_3 e^{2x} + (x^3 - 2x^2) e^{-x} - \cos 2x - 7 \sin 2x$.

14. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 e^{3x} + (x - x^2) e^{3x} + \cos 3x - \sin 3x$.

15. $y = (C_1 x + C_2) e^{-2x} + C_3 e^x + (x^3 - 2x^2) e^{-2x} - 2 \cos 2x - \sin 2x$.

16. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 4x + C_3 \sin 4x + x^2 e^{-x} - \cos x + \sin x$.

17. $y = \left(C_1 + C_2 x\right)\cos 2x + \left(C_3 + C_4 x\right)\sin 2x - \dfrac{1}{4} x^2 \cos 2x$.

18. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{x}{4} \sin x + \dfrac{1}{16} \cos 3x$.

19. $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + 2x^2 e^x + \dfrac{3 \sin x + 4 \cos x}{25} e^{-x}$.

20. $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-x} + \dfrac{1}{2} \sin x + \dfrac{1}{6} x^3 e^{-x}$.

21. $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x(\cos x + \sin x) + (x-2)e^{-x}$.

22. $y = C_1 e^x + \left(C_2 + C_3 x\right)e^{-x} + x^2 e^x + \cos x - \sin x$.

23. $y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x\right)e^x + \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 6x\right)e^{-x} + \cos x - \sin x$.

24. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x(\cos x + \sin x) + \dfrac{1}{4}(2x-1)e^x$.

25. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \dfrac{1}{4} x e^x + \left(\dfrac{1}{20} \cos 2x - \dfrac{1}{10} \sin 2x\right)e^x$.

26. $y = C_1 + \left(C_2 + C_3 x\right)e^x + \left(x^3 - 2x^2\right)e^x + \dfrac{1}{2} e^{-x}$.

27. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \dfrac{5}{3} x e^{2x} + \left(\dfrac{3}{2} \sin x - \dfrac{1}{2} \cos x\right)e^{2x}$.

28. $y = C_1 + \left(C_2 + C_3 x\right)e^{-x} + 2e^x + \left(x^3 - x^2\right)e^{-x}$.