3(6) Решить смешанную задачу:

$$u_t = u_{xx} + 9u - 9 + xe^{-16t}, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0$$

$$u|_{t=0} = 1 + \sin 3x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u|_{x=0} = 1, \qquad u_x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad t > 0.$$

2017/2018 В 82

3(6) Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \underline{9u} - \boxed{9} + xe^{-16t}, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ t > 0$$

$$u|_{t=0} = \boxed{1} + \sin 3x, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$u|_{x=0} = 1, \ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \ t > 0$$

① Замена искомой ф-ии, приводящая к однородным ГУ: $u = w + v$

$w = 1$ $\boxed{\text{замена } u = 1 + v}$

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + 9v + xe^{-16t} \\ v|_{t=0} = \sin 3x \\ v|_{x=0} = 0, \ v_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

+1

② ЗШЛ $\begin{cases} \Delta Z = Z_{xx}(x) = \lambda Z \\ Z(0) = Z'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

(–) $\lambda = a^2 > 0 \to \varnothing$

$\lambda = 0$ $\quad Z = C_1 + C_2 x$ $\quad$ ЛГУ $\to C_1 = 0$, ПГУ $C_2 = 0$ $\quad \varnothing$

$\lambda = -a^2 < 0$

ПГУ $C_2=0$?

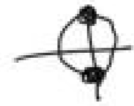
$\lambda=-a^2<0$

$Z=C_1\cos ax+\underline{C_2\sin ax}$

ЛГУ $C_1=0 \to Z=C_2\sin ax$

$Z_x=aC_2\cos ax$

ПГУ: $\underline{C_2\neq 0}$ $(a\neq 0)\to \cos a\frac{\pi}{2}=0$

$\cos a\frac{\pi}{2}=0 \to a\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ 

$a=1+2k$

$$\boxed{Z_k(x)=\sin(1+2k)x \quad +1 \quad k\in \mathbb{N}\cup\{0\}}$$

(3) Согласно МРП

$$V(x,t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cdot Z_k(x)$$

(4) $x e^{-16t} \to x=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(1+2k)x$

НУ: $\sin 3x = Z_1(x)$

$$b_k=\frac{\int_0^{\pi/2} x\sin((1+2k)x)\,dx}{\int_0^{\pi/2}\underbrace{\sin^2(1+2kx)}_{=\frac{(1-\cos(4kx+2x))}{2}}dx}=\frac{-x\frac{\cos((1+2k)x)}{1+2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos((1+2k)x)dx}{1+2k}}{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\frac{\sin(4kx+2x)}{2+4k}\Big|_0^{\pi/2}}=$$

0 0 0 0

$$=\frac{\sin(1+2k)x}{\pi/4(1+2k)^2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{(-1)^k 4}{\pi(1+2k)^2}$$

$$\boxed{b_k=\frac{4(-1)^k}{\pi(1+2k)^2}} \quad +1$$

(5) $\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t) Z_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\left[9-(1+2k)^2\right] Z_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-16t} Z_k(x)$

$$T_k(0) = \begin{cases} 0, & k \in \{0\}\cup\mathbb{N}\setminus\{1\} \\ 1, & k=1 \end{cases}$$

- $k=1$
- $k=2$

$9-(1+2k)^2$ $\quad k=1 = 0$

$k=0 \quad 9-1^2>0$

а для ВУ вид реш. был бы через e^{at}

$k \geq 2 \quad 9-(1+2k)^2<0$

для ВУ вид реш. был бы $C_1\cos at + C_2\sin at$

e^{-16t} ? резонанс $\quad 9-(1+2k)^2=-16$

$1+2k=5 \quad k=2$

$k=0$ (за этот случай очки не начисл)

$T_{0t} = 8T_0 + \frac{4}{\pi}e^{-16t} \qquad T_0(0)=0$

$T_0 = Ce^{8t} + ae^{-16t} \qquad -24a=\frac{4}{\pi} \qquad a=\frac{-1}{6\pi}$

$C=-a \qquad \boxed{T_0 = \frac{1}{6\pi}\left(e^{8t}-e^{-16t}\right)}$

$k=1$

$T_{1t} = \frac{-4}{9\pi}e^{-16t}; \quad T_1(0)=1$

$T_1 = \frac{1}{36\pi}e^{-16t} + C$ $\quad$ из НУ $\frac{1}{36\pi}+C=1$

$C = 1-\frac{1}{36\pi}$

$\boxed{T_1 = 1-\frac{1}{36\pi}+\frac{1}{36\pi}e^{-16t}}$ $\quad$ +1

$k=2$

$$\begin{cases} T_2'(t) = -16 T_2 + \boxed{\dfrac{4(-1)^2}{25\pi}} e^{-16t} \\ T_2(0) = 0 \end{cases}$$

$P_0(t)$ резонанс

$$T_2 = C e^{-16t} + a\, t\, e^{-16t}$$

$P_0(t)$ из НУ $C=0$

$$a e^{-16t} + at(-16)e^{-16t} = -16at e^{-16t} + \frac{4}{25\pi} e^{-16t}$$

$$a = \frac{4}{25\pi}$$

$$\boxed{T_2(t) = \frac{4t}{25\pi} e^{-16t}}$$ +1

$k \geq 3$

$$\begin{cases} T_k' = \left(9 - (1+2k)^2\right) T_k + b_k e^{-16t} \\ T_k(0) = 0 \end{cases}$$

$$T_k = C e^{[9-(1+2k)^2]t} + A e^{-16t}$$

Из НУ $C = -A$

$$-16A = \left(9 - (1+2k)^2\right)A + b_k$$

$$\left((1+2k)^2 - 25\right)A = \frac{4(-1)^k}{\pi(1+2k)^2}$$

$$A = \frac{4(-1)^k}{\pi(1+2k)^2\left[(1+2k)^2 - 25\right]}$$

$$\boxed{T_k = \frac{4(-1)^k\left(e^{-16t} - e^{[9-(1+2k)^2]t}\right)}{\pi(1+2k)^2\left[(1+2k)^2 - 25\right]}}$$ +1

Ответ;

$$u = 1 +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{36\pi} + \frac{1}{36\pi} e^{-16t}\right) \sin 3x +$$

$$+ \frac{4}{25\pi} t e^{-16t} \sin 5x +$$

$$+ \sum_{k=0,3,4,\dots}^{\infty} \frac{4(-1)^k \left[e^{-16t} - e^{[9-(1+2k)^2]t}\right]}{\pi (1+2k)^2 \left[(1+2k)^2 - 25\right]} \sin(1+2k)x$$