2.⑤ Решить смешанную задачу для полуоси:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 16\cos(x+2t), \qquad x > 0, \quad t > 0;$$

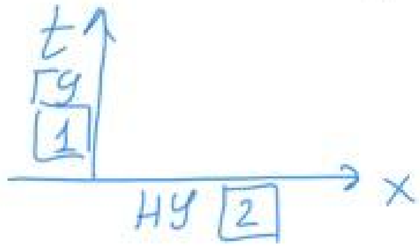
$$u|_{t=0} = -3x\sin x, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin x - 2x\cos x, \qquad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \qquad t > 0.$$

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 16\cos(x+2t) \quad x>0,\ t>0;$$

$$u|_{t=0} = -3x\sin x,\ u_t|_{t=0} = 2\sin x - 2x\cos x,\ x>0,$$

ГУ $u_x|_{x=0} = 0,\quad t>0$



ур-е х-к:

$$(dx)^2 = 4(dt)^2$$

$$x = \pm 2t + \text{const}$$

вместо поиска г.р. сразу переходим в хар-с-му коорд.:

$$\begin{cases} \xi = x+2t \\ \eta = x-2t \end{cases}$$

табл. 1

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_t = 2u_\xi - 2u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

u_{xt} – не актуально

$$u_{tt} = 4u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}$$

табл 2 – не актуальна: проще подставить

$$\cancel{4u_{\xi\xi}} - 8u_{\xi\eta} + \cancel{4u_{\eta\eta}} = 4\left(\cancel{u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta} + \cancel{u_{\eta\eta}}\right) + 16\cos\xi$$

$$-16u_{\xi\eta} = 16\cos\xi \qquad \boxed{u_{\xi\eta} = -\cos\xi} \quad (+1)$$

$$u_\xi = -\eta\cos\xi + C(\xi)$$

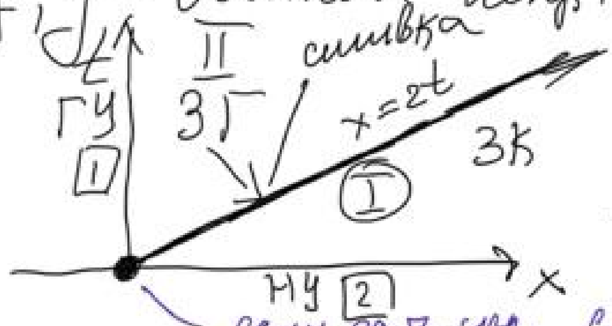
частное решение

$$u = -\eta\sin\xi + \underbrace{f(\xi) + g(\eta)}_{\text{общ. реш. однор. ур-я}} \text{ — общ. вид.}$$

Общий вид в исх. коорд.:

$$\boxed{u(x,t) = -(x-2t)\sin(x+2t) + f(x+2t) + g(x-2t)} \quad (+1)$$

f, g — дважды непр. дифф.



ЗК: $u_I(x,t)$ $\quad 0<2t<x$

ЗГ: $u_{II}(x,t)$ $\quad 0<x<2t$

если есть усл. согл. НУ и ГУ — реш. классич.

(I) $\quad 0<2t<x \quad$ ЗК

$$u_I\big|_{t=0} = -x\sin x + f_I(x) + g_I(x) = -3x\sin x$$

$$u_{It}\big|_{t=0} = \cancel{2\sin x - 2x\cos x} + f_I'(x)\cdot 2 - 2g_I'(x) =$$

$$= \cancel{2\sin x - 2x\cos x}$$

$$\cancel{4u_{\xi\xi}} - 8u_{\xi\eta} + \cancel{4u_{\eta\eta}} = 4\left(\cancel{u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta} + \cancel{u_{\eta\eta}}\right) + 16\cos\xi$$

$$-16u_{\xi\eta} = 16\cos\xi \qquad \boxed{u_{\xi\eta} = -\cos\xi}$$ +1

$$u_\xi = -\eta\cos\xi + C(\xi)$$

частное решение

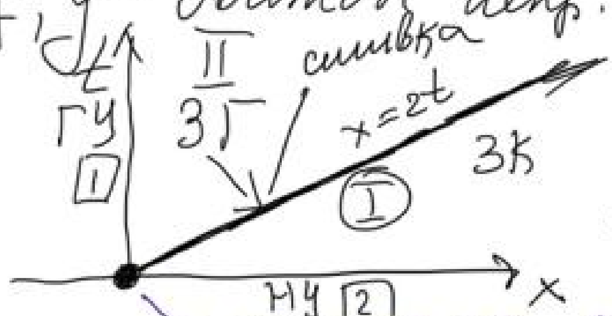
$$u = -\eta\sin\xi + \underbrace{f(\xi) + g(\eta)}$$ — общ. вид.

— общ. реш. однор. ур-я

Общий вид в исх. коорд.:

$$\boxed{u(x,t) = -(x-2t)\sin(x+2t) + f(x+2t) + g(x-2t)}$$ +1

f, g — дважды непр. дифф.



ЗК: $u_I(x,t)$ $\quad 0<2t<x$

ЗГ: $u_{II}(x,t)$ $\quad 0<x<2t$

если есть усл. согл. НУ и ГУ → реш. классич.

(I) $\quad 0<2t<x$ ЗК

– если есть усл. согл. НУ и ГУ
реш. классич.

I $0<2t<x$ 3К

$$u_I\big|_{t=0}=-x\sin x+f_I(x)+g_I(x)=-3x\sin x$$

$$u_{It}\big|_{t=0}=\cancel{2\sin x\,2x\cos x}+f_I'(x)\cdot 2-2g_I'(x)=$$

$$=\cancel{2\sin x-2x\cos x}$$

$$\begin{cases} f_I(x)+g_I(x)=-2x\sin x \\ f_I'(x)-g_I'(x)=0 \end{cases} \qquad f_I'(x)+g_I'(x)=-2\sin x-$$
$$-2x\cos x$$

$+ : 2$

$$f_I'(x)=-\sin x-x\cos x$$

$$f_I(x)=-x\sin x+C$$

$$g_I(x)=-2x\sin x-f_I(x)=-x\sin x-C$$

$$u_I(x,t)=-(x-2t)\sin(x+2t)-(x+2t)\sin(x+2t)-$$
$$-(x-2t)\sin(x-2t)$$

+1

II. $0<x<2t$ 3Г

$$u_{II}(x,t)=-(x-2t)\sin(x+2t)+f_{II}(x+2t)+g_{II}(x-2t)$$

ГУ: $u_{II\boxed{x}}\big|_{x=0}=-\sin 2t-\cancel{1}(-2t)\cos 2t+f_{II}'(2t)\cdot 1+g_{II}'(-2t)\cdot 1=0$

$=const$

сшивка: $u_{II}\big|_{x=2t}=0+f_{II}(4t)+g_{II}(0)=-4t\sin(4t)$

$$(1)\ f_{II}(\tau) = -\tau\sin\tau - g_{II}(0) \qquad \tau = 4t$$
$$(2)\ f_{II}'(\tau) + g_{II}'(-\tau) = \sin\tau - \tau\cos\tau \qquad \tau = 2t$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(1):\ f_{II}'(\tau) = -\sin\tau - \tau\cos\tau$$

$$g_{II}'(-\tau) = 2\sin\tau$$

$$-\tau = p$$

$$g_{II}'(p) = -2\sin p$$

$$g_{II}(p) = 2\cos p + C \qquad g_{II}(0) = 2\cos 0 + C = 2 + C$$

$$(1) \to \cancel{f_{II}(\tau) =} -\tau\sin\tau - g_{II}(0)$$

$$g_{II}(p) = 2\cos p + g_{II}(0) - 2$$

$$\boxed{u_{II}(x,t) = -(x-2t)\sin(x+2t) + (-(x+2t)\sin(x+2t)) - \cancel{g_{II}(0)} + 2\cos(x-2t) + \cancel{g_{II}(0)} - 2 + 2}$$

Ответ:

$$u = \underline{-(x-2t)\sin(x+2t)} - \underline{(x+2t)\sin(x+2t)} + \begin{cases} -(x-2t)\sin(x-2t), & 0 < 2t < x; \\ 2\cos(x-2t) - 2, & 0 < x < 2t. \end{cases}$$

Классическое решение?

$$v_I = -(x-2t)\sin(x-2t)$$

$$v_{II} = 2\cos(x-2t)-2$$

$v_I \big|_{x=2t} = v_{II} \big|_{x=2t}$ из сшивки $\to$ реш. непр.

Кл. р. $\to$ дважды непр. дифф.

$$\begin{array}{ccc} v_{I\,xx} & v_{I\,xt} & v_{I\,tt} \\ \overset{?}{\shortparallel} & \overset{?}{\shortparallel} & \overset{?}{\shortparallel} \\ v_{II\,xx} & v_{II\,xt} & v_{II\,tt} \end{array} \quad \text{при } x=2t$$

справиться сами

Из усл. (выполнения) согл. $\to$ классич.

$$v_{II\,x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad v_{I\,x}\Big|_{x=0} \qquad t=0$$

$$v_I\Big|_{t=0} = -3x\sin x$$

$$v_{I\,x}\Big|_{t=0} = -3\sin x - 3x\cos x$$

$$\left(v_{I\,x}\Big|_{t=0}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\left(v_{II\,x}\Big|_{x=0}\right)_t\Big|_{t=0} = 0$$

$$\left(v_{I\,t}\Big|_{t=0}\right)_x\Big|_{x=0} = (2\sin x - 2x\cos x)_x\Big|_{x=0} =$$

$$= \left(\cancel{2\cos x} - \cancel{2\cos x} + 2x\sin x\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$\Longrightarrow$ классическое!