4.④ Решить задачу Неймана для круга: $\Delta u = 9\sqrt{x^2+y^2} - 24xy, \qquad x^2+y^2<1;$

$$u_r|_{r=1} = 12\sin^2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi + \alpha, \qquad x^2+y^2=1,$$

где α — действительный параметр, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\varphi = \varphi(x,y)$ — полярные координаты точки (x,y), $\varphi(0,0)=0$.

2018/2019 б. 91

4(4) Решить задачу Неймана для круга

$\Delta U = 9\sqrt{x^2+y^2} - 24xy$ $f(x,y)$, $x^2+y^2<1$

$U_r|_{r=1} = 12\sin^2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi + \alpha$, $x^2+y^2=1$,

$2\sin^2\varphi = 1-\cos 2\varphi$

где α - действительный параметр, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и

$\varphi=\varphi(x,y)$ - полярные координаты точки (x,y), $\varphi(0,0)=0$.

$U = U_{част} + V$, где $\Delta V = 0$

корректировка ГУ,

разложение ГУ на простые гармоники

$$V = C_1 + \overset{0}{C_2}\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) + \frac{1}{r^n}(\overset{0}{d_n}\cos n\varphi + \overset{0}{f_n}\sin n\varphi)\right\}$$

$r^2 \le 1$ - классич. реш.

$$V = C_1 + \sum_{n=1} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$

$$\begin{cases}\Delta U = 9r - 24r\cos\varphi\, r\sin\varphi = 9r - 12r^2\sin 2\varphi \\ U_r|_{r=1} = 6 - 6\cos 2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi + \alpha\end{cases}$$

$$V_r = \sum_{n=1} n r^{n-1}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$$

$$V(r) = \sum_{n=1} n r^{n-1} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

△ Не для $\forall \alpha$ реш $\exists$ → вспомнить условие разрешимости

△ Решаем задачу Неймана —
— из ГУ C найти нельзя
— решение определено с точностью до произвольной постоянной

$f(r,\varphi) = f_1 + f_2 \qquad f_1 = 9r \quad f_2 = -12r^2 \sin 2\varphi$

f_1 $\quad \Delta u_{r_1} = f_1 = f(r) = 9r$

$u_{1r}\big|_{r=1} = 6 - \alpha$? если такое возможно

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u$$

$u_{r_1} = g(r) \longrightarrow g'' + \frac{1}{r} g' = 9r \,\Big|\cdot r^2$

$r^2 g'' + r g' = \underbrace{9r^3}_{P_0(r)}$ — ур-е Эйлера

$g = r^\lambda$ хар-ое ур-е $\lambda(\lambda-1) + \lambda = 0$

$\lambda^2 = 0$ — кратный корень

$g_{од} = C_1 + C_2 \ln r$, но $r < 1 \to C_2 \equiv 0$

$g_r = \underbrace{a}_{P_0(r)} r^3$ — резонанса нет

$r^2 a \cdot 3 \cdot 2r + r a 3 r^2 = 9r^3 \qquad a = 1$

$u_{r_1} = g(r) = C + r^3$

$(u_{r_1})_r = 3r^2 \to C = ? \longrightarrow \exists\, C = 0$

$\boxed{u_{r_1} = r^3}$

f_2

$$f_2 = -12r^2 \sin 2\varphi$$

$$u_{r_2} = h(r) \sin 2\varphi$$

$$h'' \sin 2\varphi + \frac{1}{r} h' \sin 2\varphi - \frac{4}{r^2} h \sin 2\varphi = -12r^2 \sin 2\varphi$$

$$\begin{cases} h'' + \frac{1}{r} h' - \frac{4}{r^2} h = -12r^2 \,\Big|\cdot r^2 \\ h_r \big|_{r=1} = -4 \end{cases}$$

ОДУ $2^{\text{го}}$ пор. — 2 конст.

ГУ – $1^{\text{но}}$ — 2 ур.

Но! классич. реш. в т. $r=0$ не должно быть особ.

$$r^2 h'' + r h' - 4h = -12 r^4 \text{ — ур-е Эйлера}$$

$P_0(\ln r)$

$h = r^\lambda$ хар. ур-е $\lambda(\lambda-1) + \lambda - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4 \qquad \lambda = \pm 2$

резон. нет.

$C_2 = 0$ т.к. классич. реш.

$$h = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2} + A r^4$$

$$r^2 A \cdot 4 \cdot 3 r^2 + r A 4 r^3 - 4 A r^4 = -12 r^4$$

$$(12 + 4 - 4) A = -12 \qquad A = -1$$

$$h = C_1 r^2 - r^4$$

$$h_r = 2C_1 r - 4r^3 \qquad h_r \big|_{r=1} = 2C_1 - 4 = -4$$

$$C_1 = 0 \qquad h(r) = -r^4$$

$$\boxed{u_{r_2} = -r^4 \sin 2\varphi}$$

$$\boxed{u_{\text{частн.}} = r^3 - r^4 \sin 2\varphi}$$

$$U = U_{частн} + V$$

$$\Delta V = 0$$

$$V_r\big|_{r=1} = 6+\alpha - 6\cos 2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi - \left(U_{частн}\right)_r\big|_{r=1} =$$

$$= 6+\alpha - 6\cos 2\varphi + \sin\varphi - 4\sin 2\varphi - \left(3r^2 - 4r^3\sin 2\varphi\right)\big|_{r=1} =$$

$$= 6+2-6\cos 2\varphi + \sin\varphi - \cancel{4\sin 2\varphi} - 3 + \cancel{4\sin 2\varphi} =$$

$$= \underbrace{3+\alpha}_{?} - 6\cos 2\varphi + \sin\varphi = V_1(\varphi)$$

$$\Delta V = 0$$
$$V_r\big|_{r=1} = 3+\alpha - 6\cos 2\varphi + \sin\varphi$$

+1

Условие разрешимости задачи Неймана

$$\boxed{\int_0^{2\pi} V_1(\varphi)\, \overset{=1}{r}\, d\varphi = 0}$$

$$\int_0^{2\pi}(3+\alpha)\,d\varphi - 6\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= (3+\alpha)\cdot 2\pi - 6\underbrace{\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \underbrace{\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 3+\alpha = 0 \qquad \boxed{\alpha = -3} \text{ усл. разр.}$$

+1

$$V_r\big|_{r=2} = V_{12}(\varphi)$$

$$V_r\big|_{r=3} = V_{13}(\varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} V_{12}(\varphi)\cdot \overset{r}{\overset{\|}{2}}\,d\varphi - \int_0^{2\pi} V_{13}(\varphi)\cdot \overset{r}{\overset{\|}{3}}\,d\varphi$$

$\alpha \neq -3$ — решения нет

$\alpha = -3$ $\quad \begin{cases} \Delta V = 0 \\ V\big|_{r=1} = -6\cos 2\varphi + \sin\varphi \end{cases}$ — задача Неймана

$$V(r,\varphi) = C + a r \sin\varphi + b r^2 \cos 2\varphi$$

$r<1$

$$V_r = a\sin\varphi + 2br\cos 2\varphi$$

из ГУ: $a = 1 \quad 2b = -6$

$$V = C + r\sin\varphi - 3r^2\cos 2\varphi$$

+2

отсутствие константы (для задачи Неймана) в ответе: −1 очко

Ответ: $\alpha \neq -3$ з. Н. не имеет решения

при $\alpha = -3$

$$U(r,\varphi) = r^3 - r^4 \sin 2\varphi + C + r\sin\varphi - 3r^2\cos 2\varphi$$