3.⑥ Решить смешанную задачу для отрезка: $u_{tt} = 9u_{xx} - 18t + 6\cos 3t \cdot \cos x, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0;$
$u|_{t=0} = 2x^3 - 3\pi x^2, \qquad u_t|_{t=0} = x^2, \qquad 0 < x < \pi;$
$u_x|_{x=0} = 0, \qquad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \qquad t > 0.$

2018-19 В 94

№3(6) Решить смешанную задачу для отрезка

$U_{tt} = 9U_{xx} - 18t + 6\cos 3t \cdot \cos x, \quad 0<x<\pi, \ t>0$

$U|_{t=0} = \boxed{2x^3} - 3\pi x^2, \ U_t|_{t=0} = x^2, \quad 0<x<\pi$ не подх ?

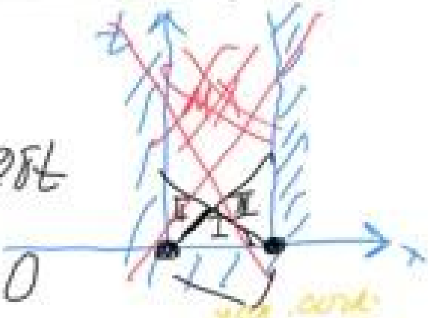
$U_x|_{x=0} = 0, \quad U_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \ t>0$

---

① $U = W + V$

$W: \quad W_x|_{x=0} = 0, \ W_x|_{x=\pi} = 2\pi t$

$\longrightarrow V: \ V_x|_{x=0} = 0, \ V_x|_{x=\pi} = 0$



? $W = ?$ 📖 Колесникова, Тихонов, Самарский

W	?	
W_x	0	$2\pi t$
x	0	π

$W_x = ax + b$

$W_x = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} W_x(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} W_x(x_1)$

$W_x = 2xt \longrightarrow W(x,t) = x^2 t$

замена $\quad U = x^2 t + V$

$$\begin{cases} V_{tt} = 9V_{xx} + \cancel{9 \cdot 2t} - \cancel{18t} + 6\cos 3t \cos x \\ V|_{t=0} = 2x^3 - 3\pi x^2, \quad V_t|_{t=0} = x^2 - x^2 = 0 \\ V_x|_{x=0} = 0, \quad V_x|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

+1

Метод разделения переменных

ЗШЛ $\quad Z(x): \begin{cases} Z_{xx} = \lambda Z(x) \\ Z_x(0) = Z_x(\pi) = 0 \end{cases}$

$\lambda = a^2 > 0 \longrightarrow \varnothing$ $\quad Z = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$

по теории опер. лапл. не полож. опр.

$\begin{cases} aC_1 - aC_2 = 0 \\ aC_1 e^{a\pi} - aC_2 e^{-a\pi} = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} a & -a \\ ae^{a\pi} & -ae^{-a\pi} \end{vmatrix} = -a^2(e^{-a\pi} - e^{a\pi}) = 2a^2 \operatorname{sh} a\pi \neq 0$

$C_1 = C_2 = 0 \Leftarrow$

на к.р. позволяет экономить время

$\lambda = 0 \quad Z_{xx} = 0 \quad Z(x) = C_1 + C_2 x$

$Z_x = C_2 \longrightarrow C_2 = 0 \quad C_1 \forall$

$\boxed{Z_0 = 1}$

$\lambda = -a^2 < 0 \quad Z(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$

$Z_x = -aC_1 \sin ax + aC_2 \cos ax$

1ГУ: $\quad C_2 = 0 \longrightarrow Z_x = -aC_1 \sin ax$

2ГУ: $\quad C_1 \neq 0 \quad (a \neq 0) \rightarrow \sin a\pi = 0$

$\boxed{a\pi = \pi k,} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow k \in \mathbb{N}$

$Z_x = aC_1 \sin kx$

$\boxed{Z_k(x) = \cos kx, \quad k \in \mathbb{N}}$

$\Longrightarrow \boxed{Z_k(x) = \cos kx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ +1

3) $\quad V(x,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos(kx)$

④ Все правые части разл. по $\{Z_k(x)\}_0^\infty$

$$f(x,t) = 6\cos 3t \cdot \cos x \qquad \cos x = Z_1(x)$$

$$2x^3 - 3\pi x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx \,\Big|\, Z_k(x) \,\int_0^\pi \qquad \begin{matrix} k=0 \\ k\in\mathbb{N} \end{matrix}$$

$k\in\mathbb{N}$

$$\alpha_k = \frac{\int_0^\pi (2x^3-3\pi x^2)\cos kx\,dx}{\int_0^\pi \cos^2 kx\,dx} =$$

$$= \frac{\cancel{(2x^3-3\pi x^2)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^\pi} - \frac{1}{k}\int_0^\pi (6x^2-6\pi x)\sin kx\,dx}{\int_0^\pi \frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx} =$$

$$= \frac{\frac{1}{k}\cancel{(6x^2-6\pi x)\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^\pi} - \frac{1}{k^2}\int_0^\pi (12x-6\pi)\cos kx\,dx}{\frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{\sin 2kx}{2\cdot 2k}\Big|_0^\pi}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{-1}{k^2}\,\cancel{\frac{\sin kx}{k}(12x-6\pi)\Big|_0^\pi} + \frac{2}{\pi k^3}\int_0^\pi \sin kx\cdot(12)\,dx =$$

$$= \frac{-24}{\pi k^4}\cos kx\Big|_0^\pi = \frac{-24}{\pi k^4}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{24\left[1-(-1)^k\right]}{\pi k^4}$$

$k=0$

$$\alpha_0 = \frac{\int_0^\pi (2x^3-3\pi x^2)\cdot 1\,dx}{\int_0^\pi 1\cdot 1\,dx} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^4}{2} - \pi x^3\right)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^4}{2} - \pi^4\right) = -\frac{\pi^3}{2}$$

$$\boxed{\alpha_0 = -\frac{\pi^3}{2}, \quad \alpha_k = \frac{24}{\pi k^4}\left[1-(-1)^k\right]}$$

+1

(5)
$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k'' Z_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 9 T_k (-k^2) Z_k + \begin{cases} 6\cos t\, Z_1, & k=1 \\ 0, & k\in\{0\}\cup\mathbb{N}\setminus\{1\} \end{cases} \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(0) Z_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k Z_k, \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k'(0) Z_k = 0 \\ \text{ГУ выполнены по постр. } \{Z_k(x)\}_0^{\infty} \end{cases}$$

$k=0$
$$\begin{cases} T_0'' = 0 \\ T_0(0) = \alpha_0 = -\frac{\pi^3}{2} \qquad T_0'(0) = 0 \end{cases}$$

+1

$$T_0 = C_1 + C_2 t \longrightarrow C_1 = \alpha_0, \quad C_2 = 0$$

$$\boxed{T_0 = -\frac{\pi^3}{2}}$$

$k=1$
$$\begin{cases} T_1'' = -9T_1 + 6\cos 3t \; \text{– резонанс} \\ T_1(0) = \alpha_1 = \frac{48}{\pi} \qquad T_1'(0) = 0 \end{cases}$$

по спр. [illegible]

$$T_1 = \underbrace{C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t}_{\text{общ. реш. одн. дифф. ур-я}} + \underbrace{t\,(a\cos 3t + b\sin 3t)}_{\text{частн. реш.}}$$

из-за резонанса

$$(u\cdot v)^{(2)} = u^{(2)}\cdot v + 2u^{(1)}v^{(1)} + u\cdot v^{(2)}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

$$2(-3a\sin 3t + 3b\cos 3t) \cancel{- 9t(a\cos 3t + b\sin 3t)} =$$
$$= \cancel{-9t(a\cos 3t + b\sin 3t)} + 6\cos 3t$$

$$6b = 6 \qquad \boxed{b = 1}$$
$$-6a = 0$$

$$T_1 = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + t\sin 3t$$
$$C_1 = \alpha_1 = \frac{48}{\pi} \qquad C_2 = 0$$

+2

$$\boxed{T_1 = \frac{48}{\pi}\cos 3t + t\sin 3t}$$

$\underline{\underline{k \geq 2}}$ $\quad T_k'' = -9k^2 T_k$

$$T_k(0) = \alpha_k \quad T_k'(0) = 0$$

$$T_k(t) = C_1 \cos 3kt + C_2 \sin 3kt$$

из НУ $\quad C_1 = \alpha_k \quad C_2 = 0$

$$\boxed{\alpha_k = \begin{cases} \frac{48}{\pi k^4}, & k = 2l+1,\ l \in N \\ 0, & k = 2l,\ l \in N \end{cases}}$$

+1

$$T_k(t) = \frac{24[1-(-1)^k]}{\pi k^4} \cos 3kt$$

Ответ: $\quad u = x^2 t - \frac{\pi^3}{2} +$

$$+ \left(\frac{48}{\pi} \cos 3t + t \sin 3t\right) \underline{\underline{\cos x}} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{24[1-(-1)^k]}{\pi k^4} \cos 3kt \cdot \underline{\underline{\cos kx}}$$

не забывать

пр. Вейерштрасса

Мажоранта $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{48}{\pi k^4} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A}{k^4}$

втор. произв $\to \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C}{k^2}$ – сх. абс. по инт. признаку.

Для мажор. вида $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{B}{k^3}$ – рез-т не столь очевиден – прив. к признакам Дирихле, Абеля

3. (6) $u = v + tx^2$.

$v_{tt} = 9v_{xx} + 6\cos 3t \cdot \cos x$,

$v|_{t=0} = 2x^3 - 3\pi x^2$, $\quad v_t|_{t=0} = 0$, $\quad v_x|_{x=0} = 0$, $\quad v_x|_{x=\pi} = 0$.

$X_k := \cos kx$, $\quad \lambda_k := 9k^2$, $\quad k \in \overline{0,\infty}$

$2x^3 - 3\pi x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$

$a_0 = -\frac{1}{2}\pi^3$, $\qquad a_k = \frac{24}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k^4}$, $\qquad k \in \overline{1,\infty}$.

$u = tx^2 + v_1 + v_2 + v_3$, где

$v_1 = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos 3kt \cdot \cos kx$, $\quad v_2 = a_0$, $\quad v_3 = (a_1 \cos 3t + t\sin 3t)\cos x$.