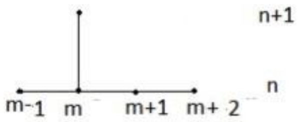
Методом интерполяции на нижнем слое или методом неопределенных коэффициентов построить схему наивысшего порядка аппроксимации для однородного линейного уравнения переноса

$u'_t - cu'_x = 0 \ (c > 0)$ на предложенном шаблоне 

.

метод интерполяции на нижнем слое

Уравнение характеристик $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{-c}$, т.е. $x = -ct + const$.

Первый интеграл $u_1(x,t) = x + ct$.

Общее решение $u(x,t) = F[x + ct]$ постоянно вдоль характеристики $x = -ct + const$.

Выпустим из точки (x_m, t^{n+1}) характеристику до пересечения с нижним временным слоем, т.е до точки (x_*, t^n): $x_m + ct^{n+1} = x_* + ct^n$, откуда $x_* - x_m = c\tau$.

Заметим, что $x_* - x_{m+1} = x_* - (x_m + h) = c\tau - h$ и $x_* - x_{m+2} = c\tau - 2h$.

$u_m^{n+1} = u(x_m, t^{n+1}) = u(x_*, t^n) = u_*^n$

Построим интерполяционный полином для определения u_*^n на нижнем временном слое в форме Ньютона (шаг h постоянный):

$u^n(x)$	x	$u^n(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x_{i+1} - x_i}$	$u^n(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$u^n(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
u_{m-1}^n	x_{m-1}			
		$\dfrac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$		
u_m^n	x_m		$\dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h \cdot 2h}$	
		$\dfrac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}$		$\dfrac{u_{m+2}^n - 3u_{m+1}^n + 3u_m^n - u_{m-1}^n}{h \cdot 2h \cdot 3h}$
u_{m+1}^n	x_{m+1}		$\dfrac{u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + u_m^n}{h \cdot 2h}$	
		$\dfrac{u_{m+2}^n - u_{m+1}^n}{h}$		
u_{m+2}^n	x_{m+2}			

Запишем, например, второй интерполяционный полином Ньютона (для интерполяции назад):

$$u^n(x)=u^n_{m+2}+\frac{u^n_{m+2}-u^n_{m+1}}{h}(x-x_{m+2})+\frac{u^n_{m+2}-2u^n_{m+1}+u^n_m}{2h^2}(x-x_{m+2})(x-x_{m+1})+$$
$$+\frac{u^n_{m+2}-3u^n_{m+1}+3u^n_m-u^n_{m-1}}{6h^3}(x-x_{m+2})(x-x_{m+1})(x-x_m).$$

Т.о. $u^n_* = u^n_{m+2}+\frac{u^n_{m+2}-u^n_{m+1}}{h}(c\tau-2h)+\frac{u^n_{m+2}-2u^n_{m+1}+u^n_m}{2h^2}(c\tau-2h)(c\tau-h)+$
$$+\frac{u^n_{m+2}-3u^n_{m+1}+3u^n_m-u^n_{m-1}}{6h^3}(c\tau-2h)(c\tau-h)c\tau.$$

Вводя для удобства число Куранта $K=\frac{c\tau}{h}$, получаем

$$\boxed{\begin{aligned}u^{n+1}_m &= u^n_{m+2}+(u^n_{m+2}-u^n_{m+1})(K-2)+\frac{u^n_{m+2}-2u^n_{m+1}+u^n_m}{2}(K^2-3K+2)+\\ &+\frac{u^n_{m+2}-3u^n_{m+1}+3u^n_m-u^n_{m-1}}{6}(K^3-3K^2+2K)\end{aligned}}$$

метод неопределенных коэффициентов

Запишем теперь для однородного линейного уравнения переноса на указанном пятиточечном шаблоне разностное уравнение с неопределенными коэффициентами: $a_1u^{n+1}_m+a_2u^n_{m-1}+a_3u^n_m+a_4u^n_{m+1}+a_5u^n_{m+2}=0$.

Воспользуемся разложением проекции точного решения на сетку по формуле Тейлора:

$$u^{n+1}_m=u^n_m+\tau(u_t)^n_m+\frac{\tau^2}{2}(u_{tt})^n_m+O(\tau^3),$$

$$u^n_{m-k}=u^n_m-kh(u_x)^n_m+\frac{(kh)^2}{2}(u_{xx})^n_m-\frac{(kh)^3}{3!}(u_{xxx})^n_m+\frac{(kh)^4}{4!}(u_{xxxx})^n_m+O(h^5):$$

$$a_1\left[u^n_m+\tau(u_t)^n_m+\frac{\tau^2}{2}(u_{tt})^n_m+O(\tau^3)\right]+$$
$$+a_2\left[u^n_m-h(u_x)^n_m+\frac{(h)^2}{2}(u_{xx})^n_m-\frac{(h)^3}{6}(u_{xxx})^n_m+O(h^4)\right]+$$
$$+a_3u^n_m+$$
$$+a_4\left[u^n_m+h(u_x)^n_m+\frac{(h)^2}{2}(u_{xx})^n_m+\frac{(h)^3}{6}(u_{xxx})^n_m+O(h^4)\right]+$$
$$+a_5\left[u^n_m+2h(u_x)^n_m+\frac{(2h)^2}{2}(u_{xx})^n_m+\frac{(2h)^3}{6}(u_{xxx})^n_m+O(h^4)\right]=[u_t]^n_m-[u_x]^n_m.$$

Составляем систему из 5 уравнений для 5 неизвестных:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0, \\ a_1\tau = 1, \\ -ha_2 + ha_4 + 2ha_5 = -c, \\ \dfrac{h^2}{2}a_2 + \dfrac{h^2}{2}a_4 + \dfrac{(2h)^2}{2}a_5 = 0, \\ -\dfrac{h^3}{6}a_2 + \dfrac{h^3}{6}a_4 + \dfrac{(2h)^3}{6}a_5 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -\dfrac{1}{\tau}, \\ a_1 = \dfrac{1}{\tau}, \\ -a_2 + a_4 + 2a_5 = -\dfrac{c}{h}, \\ a_2 + a_4 + 4a_5 = 0, \\ -a_2 + a_4 + 8a_5 = 0. \end{cases}$$

При этом $(u_t)_m^n + O(\tau) - c(u_x)_m^n + O(h^3) = [u_t]_m^n - c[u_x]_m^n$, т.е. порядок аппроксимации будет $\boxed{O(\tau, h^3)}$.

Целесообразно последние три уравнения системы рассмотреть отдельно:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c/h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -c/h \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{[(2)+(3)]/2 \\ (3)-(1)}]{-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & c/h \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & c/h \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(2)-(3) \\ (3)/6}]{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & c/h \\ 0 & 1 & 0 & -c/h \\ 0 & 0 & 1 & c/(6h) \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(2) \\ (3)}]{(1)-4(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2c/(6h) \\ 0 & 1 & 0 & -6c/(6h) \\ 0 & 0 & 1 & c/(6h) \end{array}\right), \text{ т.о. } \boxed{\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \frac{c}{6h}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}},$$

и $a_3 = -\dfrac{1}{\tau} - (a_2 + a_4 + a_5) = -\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{3c}{6h}$.

Подставляя найденные значения, получаем: $\dfrac{1}{\tau}u_m^{n+1} + \dfrac{2c}{6h}u_{m-1}^n - \left(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{3c}{6h}\right)u_m^n - \dfrac{6c}{6h}u_{m+1}^n + \dfrac{c}{6h}u_{m+2}^n = 0$

или

$$\boxed{\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c\,\frac{-2u_{m-1}^n - 3u_m^n + 6u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{6h} = 0}.$$