2003/2004 31

1④ Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^2\sin^2 z\cdot\sin\left(\dfrac{1}{z-\dfrac{\pi}{2}}\right)}{(\cos z-1)^2}e^{\sin z/z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 - 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 - 4 стр. 91 – 93)

① $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z. Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяются особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z=0$ - нуль знаменателя аргумента экспоненты,

$z=\dfrac{\pi}{2}$ - нуль знаменателя аргумента синуса в числителе,

$z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ - нули знаменателя,

$z=\infty$.

② Покажем, что точка $z=0$ является устранимой особой точкой[1] для функции $f(z)$:

$$f(z)=\frac{z^2\left(z+o(z^2)\right)^2\cdot\sin\left(-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2z}{\pi}}\right)}{\left(1-\dfrac{z^2}{2}+o(z^3)-1\right)^2}e^{\left(z+o(z^2)\right)/z}=\frac{\left(z^4+o(z^5)\right)\cdot\sin\left(-\dfrac{2}{\pi}+o(1)\right)}{\dfrac{z^4}{4}+o(z^5)}e^{1+o(1)}\xrightarrow[z\to0]{}-4e\sin\frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $\boxed{z=0\ \text{- УОТ}}$ для $f(z)$.

③ Покажем, что точка $z=\dfrac{\pi}{2}$ является существенно особой[2] для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2\pi l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_l=\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{z_l-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2\pi l}\right)}=\sin(2\pi l)=0$, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty}f(z_l)=0$;

пусть теперь $z_m=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{z_m-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}\right)}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\right)=1$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}f(z_m)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{2}-1\right)^2}e^{\left(\sin\frac{\pi}{2}/\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi^2}{4}e^{2/\pi}\neq0.$$

---

[1] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

Следовательно, $\boxed{z=\dfrac{\pi}{2}\text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

③ Рассмотрим точки $z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\dots$, в которых нули знаменателя совпадают с нулями числителя функции $f(z)$. Произведем замену: $t=z-2\pi k$. Тогда

$$f(t)=\frac{(2\pi k)^2t^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2\pi k-\dfrac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o\left(t^3\right)}{\left(-\dfrac{t^2}{2}+o\left(t^3\right)\right)^2}e^{\left(\frac{t+o\left(t^2\right)}{2\pi k+o(1)}\right)}=\frac{(2\pi k)^2t^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2\pi k-\dfrac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o\left(t^3\right)}{\dfrac{t^4}{4}+o\left(t^5\right)}e^{\left(\frac{t+o(t)}{2\pi k}\right)}=$$

$$\frac{(2\pi k)^2\sin\left(\dfrac{1}{2\pi k-\dfrac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t)}{\dfrac{t^2}{4}+o\left(t^3\right)}e^{o(1)}\xrightarrow[t\to0]{}\infty$$ - полюсы[3] 2-го порядка.

Точки $\boxed{z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots\text{ - полюсы 2-го порядка}}$ для функции $f(z)$.

④ $\boxed{z=\infty\text{ - неизолированная особая точка}}$ (НОТ)[4], т.к. в любой ее окрестности есть полюсы 2-го порядка $z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\dots$ (точка накопления полюсов).

---

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

[4] **Определение**. Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho>0$. Тогда точку a называют ***изолированной особой точкой (однозначного характера) функции*** f.