§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Основные понятия

Нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка n называется система вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \ , \qquad k = \overline{1, n} \qquad , \tag{2.1}$$

где $a_{kj} = \text{const}$.

Вводя в рассмотрение вектор-функцию $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ и матрицу $A = (a_{kj})$, уравнения (2.1) можно представить в векторной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \ . \tag{2.2}$$

2.2. Общее решение однородной системы

Фундаментальной системой решений однородной системы дифференциальных уравнений (2.1) называется совокупность n линейно независимых решений

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

этой системы.

Общее решение векторного уравнения (2.2) представляется в виде

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t) + \ldots + C_n \vec{x}_n(t),$$

(2.4)

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные.

2.3. Метод Эйлера

(Метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы).

Чтобы найти решения (2.2):

1) Вычислим собственные значения матрицы A, решив характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

(2.5)

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни (2.5), вообще говоря, комплексные.

Для собственного значения λ, отвечающий ему собственный вектор $\vec{h}$ определяется условием

$$A\vec{h} = \lambda\vec{h}, \qquad \vec{h} \neq 0.$$

(2.6)

2.1) Корни характеристического уравнения (2.5) действительные, простые. Тогда существует базис из собственных векторов матрицы A: $A\vec{h}_m = \lambda_m \vec{h}_m$, $\vec{h}_m \neq 0$, $m = \overline{1, n}$.

Вектор-функции $\vec{x}_m = \vec{h}_m e^{\lambda_m t}$, $m = \overline{1, n}$ являются решениями (2.2).

Общее решение векторного уравнения (2.2) есть их произвольная линейная комбинация (C_m – постоянные)

$$\vec{x} = \sum_{m=1}^{n} C_m \vec{h}_m e^{\lambda_m t}.$$

(2.8)

2.2) Корни характеристического уравнения (2.5) невещественные, простые.

Еще раз напомним, что для комплексного числа $z = x + iy$, где $x, y \in \mathsf{R}$, его действительной и мнимой частью называются соответственно $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Кроме того, имеет место формула Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$.

Если среди корней характеристического уравнения (2.5) есть невещественный корень $\lambda = \alpha + i\beta$, то комплексно сопряженное ему число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также будет корнем этого уравнения (по свойству алгебраических уравнений с действительными коэффициентами). Этой комплексной паре корней соответствуют два линейно независимых частных решения векторного уравнения (2.2) $\vec{x}(t) = \vec{h}\, e^{\lambda t}$ и $\vec{\overline{x}}(t) = \vec{\overline{h}}\, e^{\overline{\lambda} t}$. Поскольку ставится задача отыскания действительных решений системы дифференциальных уравнений, то в качестве решений, соответствующих такой паре комплексных сопряженных собственных значений матрицы A, выбирают линейные комбинации решений $\vec{x}$ и $\vec{\overline{x}}$, а именно, $\vec{x}_1(t) = \dfrac{\vec{x}(t) + \vec{\overline{x}}(t)}{2}$ и $\vec{x}_2(t) = \dfrac{\vec{x}(t) - \vec{\overline{x}}(t)}{2i}$, или $\vec{x}_1(t) = \operatorname{Re}\vec{x}(t)$ и $\vec{x}_2(t) = \operatorname{Im}\vec{x}(t)$.

З а м е ч а н и е. В более общем случае, когда собственный вектор для числа $\overline{\lambda}$ берется не сопряженным с вектором $\vec{h}$, действительная и мнимая части соответствующего комплекснозначного решения системы будут линейными комбинациями действительных решений $\vec{x}_1(t) = \operatorname{Re}\left(\vec{h}\, e^{\lambda t}\right)$ и $\vec{x}_2(t) = \operatorname{Im}\left(\vec{h}\, e^{\lambda t}\right)$, найденных для собственного значения λ.

Т.о., если $\alpha \pm i\beta$ – простые корни характеристического уравнения (2.5), то компонента общего решения системы, соответствующая этой паре комплексных корней, записывается в виде

$$\vec{x} = C_1\,\vec{x}_1(t) + C_2\,\vec{x}_1(t) \;\; = C_1\,\mathrm{Re}\left(\vec{h}\,e^{\lambda t}\right) + C_2\,\mathrm{Im}\left(\vec{h}\,e^{\lambda t}\right),$$

(2.9)

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $\vec{h}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = \alpha + i\beta$.

2.3) Корни характеристического уравнения действительные кратные. В этом случае матрица A может не иметь n линейно независимых собственных векторов. Тогда для построения общего решения (2.2) используется следующее понятие.

Жордановой цепочкой матрицы A, соответствующей собственному значению λ, называется система векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p$ такая, что

$$\begin{aligned}
&A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1, \qquad \vec{h}_1 \neq \vec{0},\\
&A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1,\\
&A\vec{h}_3 = \lambda\vec{h}_3 + \vec{h}_2,\\
&\qquad\vdots\\
&A\vec{h}_p = \lambda\vec{h}_p + \vec{h}_{p-1}.
\end{aligned}$$

(2.10)

Вектор $\vec{h}_1$ – собственный, а $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$, ..., $\vec{h}_p$ – присоединенные векторы.

Равенства (2.10) можно записать также в виде

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda E)\vec{h}_1 = \vec{0}, \qquad \vec{h}_1 \neq \vec{0},\\
&(A - \lambda E)\vec{h}_k = \vec{h}_{k-1},\; k = \overline{2, p}.
\end{aligned}$$

(2.11)

Каждой цепочке $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, ..., $\vec{h}_p$ соответствует p линейно независимых решений $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_p$ векторного уравнения (2.2):

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda t}\vec{h}_1,$$

$$\vec{x}_2 = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}\vec{h}_1 + \vec{h}_2\right),$$

$$\vec{x}_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}\vec{h}_1 + \frac{t}{1!}\vec{h}_2 + \vec{h}_3\right),$$

……………………………

$$\vec{x}_p = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\vec{h}_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\vec{h}_2 + \ldots + \frac{t}{1!}\vec{h}_{p-1} + \vec{h}_p\right).$$

(2.12)

З а м е ч а н и е. Приведем правило запоминания формул (2.12). Собственному вектору $\vec{h}_1$ соответствует решение $\vec{x}_1 = e^{\lambda t}\vec{h}_1$. Если везде отбросить $e^{\lambda t}$, то каждая строка правой части (2.12) получается интегрированием по t предыдущей строки, причем постоянную интегрирования надо взять равной следующему по порядку вектору серии.

Для кратного собственного значения λ может существовать несколько жордановых цепочек, содержащих линейно независимые собственные векторы матрицы A.

Компонента общего решения системы, соответствующая действительному собственному значению λ кратности p, имеет вид

$$\vec{x}(t) = \sum_r e^{\lambda t}\sum_{l=1}^{k_r} C_l^{(r)}\vec{x}_l^{(r)}(t),$$

где $C_1^{(r)}$, $C_2^{(r)}$, …, $C_{k_r}^{(r)}$ – произвольные постоянные, $\sum_r k_r = p$.

Известно, что для любой квадратной матрицы A существует базис, составленный из ее жордановых цепочек, поэтому произвольная линейная комбинация решений вида (2.12) дает общее решение векторного уравнения (2.2).

2.4. Общее решение неоднородной системы

Решение неоднородной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}$$
(2.13)

можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы (2.1) с той же матрицей $A = \left(a_{kj}\right)$. Для этого в формуле общего решения (2.4) однородной системы надо заменить произвольные постоянные C_m, $m = \overline{1,n}$, на неизвестные функции $C_m(t)$:

$$\vec{x}(t) = \sum_{m=1}^{n} C_m(t)\vec{x}_m(t).$$
(2.14)

Полученные выражения для $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{n} \frac{dC_m(t)}{dt}\vec{x}_m(t) + {}$ $+ \sum_{m=1}^{n} C_m(t)\frac{d\vec{x}_m(t)}{dt}$ подставляем в неоднородную систему (2.13). Т.к. $\sum_{m=1}^{n} C_m(t)\frac{d\vec{x}_m(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{n} C_m(t)A\vec{x}_m(t)$, то получаем систему для определения $\frac{dC_m(t)}{dt}$, $m = \overline{1,n}$:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{dC_m(t)}{dt}\vec{x}_m(t) = \vec{f}.$$
(2.15)

Неизвестные функции $C_m(t)$, $m = \overline{1,n}$, находим, проинтегрировав полученные при решении системы (2.15) функции $\frac{dC_m(t)}{dt}$, $m = \overline{1,n}$.

Заметим, что если при нахождении функций $C_m(t)$ записывать всю совокупность первообразных, т.е. сохранять в записи выражений для $C_m(t)$ возникающие при интегрировании произвольные постоянные, то (2.14) будет общим решением неоднородной системы. Частное решение неоднородной системы (2.13) получим, полагая возникающие при интегрировании произвольные постоянные равными конкретному значению, например, равными нулю.

2.5. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах

Пример 2.1. (2-24). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 5x - y - 4z \\ \dot{y} &= -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} &= 10x - 3y - 9z \end{cases}, \ \left(\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 1\right).$$

① Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$.

1. Не все корни характеристического уравнения различны: либо а) существует базис из собственных векторов матрицы A системы, либо б) строим жорданову цепочку для матрицы A системы.

$\lambda_1 = -1$, $\left(A - \lambda_1 E\right)\vec{h}_1 = \vec{0}$.

Для краткости записи используются следующие обозначения: выражение $\alpha(n) + \beta(m)$ над стрелочкой означает, что перешли к эквивалентной системе алгебраических уравнений, n-я строка матрицы которой представляет собой линейную комбинацию n-й и m-й строк с коэффициентами α и β соответственно.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -12 & 6 & 12 \\ 10 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{\frac{1}{6}(2)} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+2(2)]{(1)+2(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}(2)]{(1)-\frac{1}{2}(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ дает $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ или

$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$

$\lambda_{2,3} = 1$, $(A - \lambda_2 E)\vec{h}_2 = \vec{0}$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}(2)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+3(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ дает

$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$. Нашли только один собственный вектор, поэтому строим жорданову цепочку для матрицы A системы.

$$(A-\lambda_2 E)\vec{h}_3=\vec{h}_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -4 & 1 \\ -12 & 4 & 12 & 0 \\ 10 & -3 & 10 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 10 & -3 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+3(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{дает}$$

$$\vec{h}_3=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \text{ или (при } \alpha=0\text{) } \vec{h}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

2. Общее решение

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+e^{t}\left\{C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_3\left[t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right]\right\}.$$ ❶

Пример 2.2. (2-14). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases}\dot{x} & = & 7x+y+2z \\ \dot{y} & = & 2x+3y+z \\ \dot{z} & = & -8x-2y-z\end{cases}, \quad (\lambda_{1,2,3}=3).$$

② Матрица системы $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ -8 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

1. Отметим, что все корни характеристического уравнения равны.

$(A-\lambda E)\vec{h}_1=\vec{0}$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4&1&2\\2&0&1\\-8&-2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{ дает }\vec{h}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

или $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. Нашли только один собственный вектор, поэтому строим жорданову цепочку матрицы A системы:

$(A-\lambda E)\vec{h}_2=\vec{h}_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&2&1\\2&0&1&0\\-8&-2&-4&-2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right),\quad\text{дает}$$

$$\vec{h}_2=\alpha\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{ или (при }\alpha=0\text{) }\vec{h}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

$(A-\lambda E)\vec{h}_3=\vec{h}_2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&2&0\\2&0&1&1\\-8&-2&-4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),\quad\text{дает}$$

$$\vec{h}_2=\beta\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\0\end{pmatrix}\text{ или (при }\beta=1\text{) }\vec{h}_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

3. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ C_3 e^{3t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$ ❷

Пример 2.3. (2-01). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x + 3y \\ \dot{y} &= 4y - 3z \\ \dot{z} &= -x + 3y + 5z \end{cases}, \quad (\lambda_1 = 5, \lambda_{2,3} = 4 \pm 3i).$$

③ Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Все корни характеристического уравнения различны, следовательно, существует базис из собственных векторов матрицы A системы.

$\lambda_1 = 5$, $(A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ дает } \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 4 + 3i$, $(A - \lambda_2 E)\vec{h}_2 = \vec{0}$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ -1 & 3 & 1-3i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{дает}$$

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $\vec{x}_{\lambda_2} = \vec{h}_2 e^{(4+3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(4+3i)t} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{3it} =$

$$= e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 3t + i \sin 3t) = e^{4t} \left(\begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \right).$$

Вектор-функции $\vec{x}_2 = \operatorname{Re} \vec{x}_{\lambda_2}$ и $\vec{x}_3 = \operatorname{Im} \vec{x}_{\lambda_2}$ – действительные решения системы.

2. Общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{4t} \left[C_2 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \right].$$ ❸

Пример 2.4. (2-41). Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = & x + y + \dfrac{e^{2t}}{\cos t} \\ \dot{y} = & -2x + 3y \end{cases}.$$

④ Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Решаем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

2. Все корни характеристического уравнения различны, поэтому существует базис из собственных векторов матрицы A системы.

$\lambda_1 = 2 + i$, $(A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}$.

$$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ дает

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ или } \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ или } \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $\vec{x}_{\lambda_1} = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) e^{it} =$

$$= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}\right).$$

Вектор функции $\vec{x}_1 = \operatorname{Re} \vec{x}_{\lambda_1}$ и $\vec{x}_2 = \operatorname{Im} \vec{x}_{\lambda_1}$ – действительные решения системы.

3. Общее решение однородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

4. Решение неоднородной системы ищем методом вариации постоянных, полагая $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$.

Подставляя

$$\dot{x} = C_1'(t) e^{2t} \cos t + C_1(t)\left(e^{2t} \cos t\right)' + C_2'(t) e^{2t} \sin t +$$
$$+ C_2(t)\left(e^{2t} \sin t\right)'$$

и

$$\dot{y} = C_1'(t) e^{2t}(\cos t - \sin t) + C_1(t)\left(e^{2t}(\cos t - \sin t)\right)' +$$
$$+ C_2'(t) e^{2t}(\cos t + \sin t) + C_2(t)\left(e^{2t}(\cos t + \sin t)\right)'$$

в неоднородную исходную систему, получим для определения C_1' и C_2' систему

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{2t} \cos t + C_2'(t) e^{2t} \sin t = \dfrac{e^{2t}}{\cos t}, \\ C_1'(t) e^{2t}(\cos t - \sin t) + C_2'(t) e^{2t}(\cos t + \sin t) = 0. \end{cases}$$

Сокращаем оба уравнения на e^{2t}, и умножаем первое уравнение на $\cos t$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos^2 t + C_2'(t)\sin t\cos t & = 1, \\ C_1'(t)(\cos t - \sin t) + C_2'(t)(\cos t + \sin t) & = 0. \end{cases}$$

К первому уравнению, умноженному на 2, прибавляем второе, умноженное на $(\cos t + \sin t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos^2 t + C_2'(t)\sin t\cos t & = 1, \\ C_1'(t)(\cos^2 t - \sin^2 t) + C_2'(t)(\cos t + \sin t)^2 & = 0. \end{cases}$$

Ко второму уравнению прибавляем первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} C_1'(t) - C_2'(t) = 2, \\ C_1'(t)(\cos t - \sin t) + C_2'(t)(\cos t + \sin t) = 0. \end{cases}$$

Полученный из первого уравнения результат $C_1' = C_2' + 2$ подставляем во второе уравнение $2\left(C_2' + 1\right)\cos t = 2\sin t$, откуда

$C_2(t) = \int\left(-1 + \frac{\sin t}{\cos t}\right)dt + c_2 = -t - \int\frac{d\cos t}{\cos t}dt + c_2 =$
$= -t - \ln|\cos t| + c_2$, аналогично находим $C_1(t) = \int\left(1 + \frac{\sin t}{\cos t}\right)dt + c_1 = t - \ln|\cos t| + c_1$.

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(t - \ln|\cos t| + c_1\right)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}e^{2t} +$$

$$\left(-t - \ln|\cos t| + c_2\right)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}e^{2t}. \text{❹}$$

2.6. Задачи для самостоятельного решения

Найти все действительные решения систем уравнений:

29. (2-01) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = 4y - 3z \\ \dot{z} = -x + 3y + 5z \end{cases}$, ($\lambda_1 = 5$, $\lambda_{2,3} = 4 \pm 3i$).

30. (2-02) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 2y - 2z \end{cases}$, ($\lambda_{1,2,3} = -3$).

31. (2-03) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 3y + z \\ \dot{z} = 2x - 4y + 4z \end{cases}$, ($\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm 2i$).

32. (2-04) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y - 3z \\ \dot{y} = -2y + z \\ \dot{z} = x - y \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2,3} = -2\right)$.

33. (2-11) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - 2z \\ \dot{y} = 5y - 3z \\ \dot{z} = -x + 3y \end{cases}$, ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$).

34. (2-12) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y + 2z \\ \dot{y} = 2x + 2y + z \\ \dot{z} = -8x - 2y - 2z \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2,3} = 2\right)$.

35. (2-13) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 5z \\ \dot{y} = 3x - 2y + 5z \\ \dot{z} = -x + 2y - z \end{cases}$, ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$).

36. (2-14) $\begin{cases} \dot{x} = 7x + y + 2z \\ \dot{y} = 2x + 3y + z \\ \dot{z} = -8x - 2y - z \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2,3} = 3\right)$.

37. (2-21) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 5z \\ \dot{y} = 6x - y - 6z \\ \dot{z} = -8x + 3y + 9z \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2\right)$.

38. (2-22) $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z \\ \dot{y} = -x + 2y - z \\ \dot{z} = 2x - y + 4z \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 3\right)$.

39. (2-23) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2\right)$.

40. (2-24) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y - 4z \\ \dot{y} = -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} = 10x - 3y - 9z \end{cases}$, $\left(\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1\right)$.

41. (2-31) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y \\ \dot{y} = x - 4y - 2z \\ \dot{z} = -5x + 5y + z \end{cases}$, $\left(\lambda_1 = -3,\ \lambda_{2,3} = -2 \pm i\right)$.

42. (2-32) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - z \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z \end{cases}$, $\left(\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = -1\right)$.

43. (2-33) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + z \\ \dot{y} = x - 2y + 3z \\ \dot{z} = 5x - 5y + 2z \end{cases}$, $\left(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i\right)$.

44. (2-34) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - z \\ \dot{y} = -x - 3y + z \\ \dot{z} = y - 2z \end{cases}$, $\left(\lambda_{1,2,3} = -2\right)$.

45. (2-41) $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \dfrac{e^{2t}}{\cos t} \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$,

46. (2-42) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + t\sqrt{t}e^{3t} \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$,

47. (2-43) $\begin{cases} \dot{x} = y + \dfrac{1}{\cos t} \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$,

48. (2-44) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t} \end{cases}$,

49. (2-51) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y + 2z \\ \dot{y} = -y + z \\ \dot{z} = -6x + 2y + 2z \end{cases}$, $(\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i)$.

50. (2-52) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - z \\ \dot{y} = 4x + 5y - 2z \\ \dot{z} = 8x + 6y - 3z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = 1)$.

51. (2-53) $\begin{cases} \dot{x} = -2y - z \\ \dot{y} = 2x + 4y + 2z \\ \dot{z} = -2x - 2y \end{cases}$, $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm i)$.

52. (2-54) $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 10y + 8z \\ \dot{y} = -x + z \\ \dot{z} = -3x + 6y + 4z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = -2)$.

53. (2-61) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + z \\ \dot{y} = x + 3y + z \\ \dot{z} = 2x - 2y + 4z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 4)$.

54. (2-62) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y - 6z \\ \dot{y} = y + 4z \\ \dot{z} = -y - 3z \end{cases}$, $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1)$.

55. (2-63) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = x + 2y \end{cases}$, $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2)$.

56. (2-64) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - 2z \end{cases}$, $(\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = -1)$.

2.7. Ответы

29. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}.$$

30. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$
$$+ C_3 e^{-3t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

31. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}.$$

32. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$
$$+ C_3 e^{-2t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

33. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t \\ \sin t + 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ 3\sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

34. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$
$$+ C_3 e^{2t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

35. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 2\cos t + \sin t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

36. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ C_3 e^{3t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

37. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] e^{t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

38. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3t} + \left[C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] e^{2t}.$$

39. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \left[C_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\left(t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] e^{t}.$$

40. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{t}\left\{ C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}.$$

41. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \left(C_2\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t - \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t + \cos t \\ -\sin t - 2\cos t \end{pmatrix}\right) e^{-2t}.$$

42. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] e^{-t} + C_3\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

43. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} 3\cos 2t + \sin 2t \\ 4\cos 2t + 3\sin 2t \\ 5\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3\sin 2t - \cos 2t \\ 4\sin 2t - 3\cos 2t \\ 5\sin 2t \end{pmatrix} \right) e^{t}$.

44. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + C_2 \left(\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-2t}$.

45. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}$, где

$C_1(t) = t - \ln|\cos t| + c_1$, $C_2(t) = -t - \ln|\cos t| + c_2$.

46. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{3t}$, где

$C_1(t) = \frac{2}{7} t^3 \sqrt{t} + \frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} + c_1$, $C_2(t) = -\frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} + c_2$.

47. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, где $C_1(t) = c_1$,

$C_2(t) = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_2$.

48. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t) \left(2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{t}$, где $C_1(t) = 12t^2 \sqrt{t} + c_1$,

$C_2(t) = -10t\sqrt{t} + c_2$.

49. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \right) e^{-t}$.

50. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{t}$.

51. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -2\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix} \right) e^{t}$.

52. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \left[C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-2t}.$$

53. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{4t}.$$

54. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-t}.$$

55. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \left[C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] e^{2t}.$$

56. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \left[C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right] e^{-t}.$$