2010пкр-2-2

2 (4)	Методом обратной интерполяции найти корень нелинейного уравнения с точностью 10^{-3}, используя приведенные таблицы:

$(x-1)^2-0.5e^x=0$	x	x_1=0.2	x_2=0.25	x_3=0.27	x_4=0.3
	$f(x)$	0.029	–0.080	-0.122	-0.185

I способ

① Замечаем, что $f(x)\ \downarrow\downarrow:\ f(x_i)>f(x_{i+1})$ при $x_i<x_{i+1}$, поэтому существует $g(f_i)=x_i$.

② Построим интерполяционный полином в форме Ньютона, используя (в силу неравномерности шага таблицы) разделенные разности:

$y=f(x)$	$x=g(y)$	$g(y_i,y_{i+1})=\frac{g(y_{i+1})-g(y_i)}{y_{i+1}-y_i}$	$g(y_i,y_{i+1},y_{i+2})=\frac{g(y_{i+1},y_{i+2})-g(y_i,y_{i+1})}{y_{i+2}-y_i}$	$g(y_i,y_{i+1},y_{i+2},y_{i+3})=\frac{g(y_{i+1},y_{i+2},y_{i+3})-g(y_i,y_{i+1},y_{i+2})}{y_{i+3}-y_i}$
0.029	0.2			
		$\frac{0.25-0.2}{-0.080-0.029}=-0.45872$		
–0.080	0.25		$\frac{-0.47619-(-0.45872)}{-0.122-0.029}=0.115728$	
		-0.47619		$\frac{-0.115728-0}{-0.185-0.029}=0.540784$
-0.122	0.27		0	
		-0.47619		
-0.185	0.3			

Удобнее использовать второй интерполяционный многочлен Ньютона (многочлен для интерполяции назад (в конце таблицы)):

$$N_3^{II}(y)=g(y_4)+(y-y_4)g(y_3,y_4)+(y-y_4)(y-y_3)g(y_2,y_3,y_4)+(y-y_4)(y-y_3)(y-y_2)g(y_1,y_2,y_3,y_4)=$$

$$=0.3-(y+0.185)\cdot 0.47619+(y+0.185)(y+0.122)\cdot 0+(y+0.185)(y+0.122)(y+0.080)\cdot 0.540784.$$

③ $N_3^{II}(0)=0.3-0.185\cdot 0.47619+0.185\cdot 0.122\cdot 0.080\cdot 0.540784=\underline{0.212881}$.

④ Точность, с которой вычисляется корень, есть остаточное слагаемое

$$R_4(y)=\frac{g^{(4)}(\eta)}{4!}(y-y_4)(y-y_3)(y-y_2)(y-y_1)\ \text{при}\ y=0:\ \Delta=\max_{\eta}|R_4(0)|:$$

$$R_4(0)=-\frac{g^{(4)}(\eta)}{4!}0.185\cdot 0.122\cdot 0.080\cdot 0.029=g^{(4)}(\eta)\cdot 2.18177\text{E}-06,$$

$$g^{(4)}(\eta)=\frac{1}{f^{(4)}(\xi)}<2.$$

Т.о., требуемая точность достигнута $\Delta<0.5\cdot 10^{-5}$.

II способ.

① Замечаем, что $f(x)\ \downarrow\downarrow:\ f(x_i) > f(x_{i+1})$ при $x_i < x_{i+1}$, поэтому существует $g(f_i) = x_i$.

② Построим интерполяционный полином в форме Ньютона, используя (в силу неравномерности шага таблицы) разделенные разности:

$y=f(x)$	$x=g(y)$	$g(y_i,y_{i+1})=\frac{g(y_{i+1})-g(y_i)}{y_{i+1}-y_i}$	$g(y_i,y_{i+1},y_{i+2})=\frac{g(y_{i+1},y_{i+2})-g(y_i,y_{i+1})}{y_{i+2}-y_i}$	$g(y_i,y_{i+1},y_{i+2},y_{i+3})=\frac{g(y_{i+1},y_{i+2},y_{i+3})-g(y_i,y_{i+1},y_{i+2})}{y_{i+3}-y_i}$
0.029	0.2			
		$\frac{0.25-0.2}{-0.080-0.029}=-0.45872$		
–0.080	0.25		$\frac{-0.47619-(-0.45872)}{-0.122-0.029}=0.115728$	
		-0.47619		$\frac{-0.115728-0}{-0.185-0.029}=0.540784$
-0.122	0.27		0	
		-0.47619		
-0.185	0.3			

③Точность, с которой вычисляется корень, есть остаточное слагаемое $R_3(y)=\frac{g^{(3)}(\eta)}{3!}(y-y_4)(y-y_3)(y-y_2)$ при $y=0$:

$\Delta = |R_3(0)| = 0.540784\cdot 0.185\cdot 0.122\cdot 0.080 = 0.00098$ достигается на интерполянтах уже второго порядка.

Замечание: в качестве $\frac{g^{(3)}(\eta)}{3!}$ берем третью разделенную разность $g(y_1,y_1,y_3,y_4)$.

④ Корень расположен на промежутке $(-0.080; 0.029)$. Строим первый интерполяционный многочлен Ньютона (многочлен для интерполяции вперед (в начале таблицы)):

$$N_2^I(y) = g(y_1)+(y-y_1)g(y_1,y_2)+(y-y_1)(y-y_2)g(y_1,y_2,y_3) =$$
$$= 0.2-(y-0.029)\cdot 0.45872+(y-0.029)(y+0.0.80)\cdot 0.115728.$$

⑤ $N_2^I(0) = 0.2+0.029\cdot 0.45872-0.029\cdot 0.080\cdot 0.115728 = \underline{0.213034}$.

Ответ: $x = 0.213$.