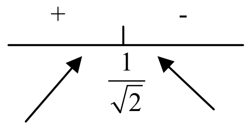
2010пкр-2-3

3 (4)	Методом простой итерации найти ширину функции на полувысоте с точностью 10^{-3}: $f(x) = x\exp(-x^2), \quad x \ge 0$.

① Находим $f_{\max}$ $\left(f(x) > 0,\ f(0) = 0 \right)$:

$$f'(x) = \exp(-x^2) - 2x^2\exp(-x^2) = \exp(-x^2)\left(1-2x^2\right) = 0 \text{, т.е. } 1-2x^2 = 0 \text{ и } x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.\ x \ge 0 \to \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$



$$\to f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

② $\frac{1}{2}f_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \to$ решаем уравнение $x\exp(-x^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, у которого надо найти два корня.

Локализуем эти корни: $x_{[1]} \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $x_{[2]} \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$.

③ Строим две последовательности итераций $x_{k+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{x_k^2 - \frac{1}{2}}$ и $x_{k+1} = \sqrt{\ln\left(x_k 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}\right)}$.

④ Дифференцированием проверяем, что первое отображение $x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$, где $\varphi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{x^2 - \frac{1}{2}}$, является сжимающим на $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, т.к. $\varphi_1' = \frac{x}{\sqrt{2}}e^{x^2 - \frac{1}{2}} \le \frac{1}{2} < 1$ при $x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$;

а второе отображение $x_{k+1} = \varphi_2(x_k)$, где $\varphi_2(x) = \sqrt{\ln x + \ln\left(2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}}$, является сжимающим на $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$, т.к.

$$\varphi_2' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + \ln\left(2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\ln 2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\ln 2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\ln 4 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ при } x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

⑤ Из априорной оценки $\left|\xi - x_k\right| \le \frac{q^k}{1-q}\left|x_1 - x_0\right|$ получаем, что число итераций $k \ge \log_q \frac{(1-q)\left|\xi - x_k\right|}{\left|x_1 - x_0\right|}$.

⑥ $\underline{\text{Найдем } x_{[1]} \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$:

Пусть $x_0 = \frac{1}{2} \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = 0.275348$ и $\left|x_1 - x_0\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}} - 1\right) = 0.22465$, $q = \frac{1}{2}$,

$\left|\xi - x_k\right| = \frac{10^{-3}}{2}$ и $k \ge \log_{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}\frac{10^{-3}}{2}}{0.22465} = \log_2 898.6 = 9.81$, т.о., для обеспечения заданной точности надо совершить 10 итераций:

$x_1 = 0.275348$, $x_2 = 0.231331$, $x_3 = 0.226229$, $x_4 = 0.225702$, $x_5 = 0.225648$, $x_6 = 0.225642$, $x_7 = 0.225642$, $x_8 = 0.225642$, $x_9 = 0.225642$, $x_{10} = 0.225642$. $\boxed{x_{[1]} = x_{10} = 0.225642 \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

Замечание: как видно из расчетов, хватило бы 5-ти итераций для обеспечения заданной точности.

⑦ $\underline{\text{Найдем } x_{[2]} \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)}$:

Пусть $x_0 = 1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$. Тогда $x_1 = \sqrt{\ln\left(2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}} = 1.240855$ и $\left|x_1 - x_0\right| = 0.240855$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left|\xi - x_k\right| = \frac{10^{-3}}{2}$ и

$k \ge \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{10^{-3}}{2}}{0.240855} = \log_{\sqrt{2}} 681.2408 = 18.82404$, т.о., для обеспечения заданной точности надо совершить 19 итераций:

$x_1 = 1.240855,\ x_2 = 1.324961,\ x_3 = 1.349483,\ x_4 = 1.35626,\ x_5 = 1.358106,\ x_6 = 1.358607,\ x_7 = 1.358742,$
$x_8 = 1.358779,\ x_9 = 1.358789, x_{10} = 1.358792,\ x_{11} = 1.358792,\ x_{12} = 1.358793,\ x_{13} = 1.358793,\ x_{14} = 1.358793,$
$x_{15} = 1.358793,\ x_{16} = 1.358793,\ x_{17} = 1.358793,\ x_{18} = 1.358793,\ x_{19} = 1.358793,$. $\underline{x_{[2]} = x_{19} = 1.358793 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};2\right)}$.

Замечание: как видно из расчетов, хватило бы 7-ми итераций для обеспечения заданной точности.
⑧ Найдем теперь ширину функции на полувысоте: $\underline{\Delta_{1/2} = x_{[2]} - x_{[1]}}$ $\underline{= 1.358 - 0.225 = 1.133}$.

Ответ: $f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$, $x_{[1]} = 0.225$, $x_{[2]} = 1.358$, $\Delta_{1/2} = 1.133$.