2010пкр-2-6

6 (6) А) Для функции, заданной таблично, вычислить значение определенного интеграла методом трапеций, сделать уточнение результата по правилу Рунге. Сравнить уточненный результат с вычислениями по методу Симпсона.

x	x_1=0.	x_2=0.125	x_3=0.25	x_4=0.375	x_5=0.5	x_6=0.625	x_7=0.75	x_8=0.875	x_9=1.
$f(x)$	0.000000	0.021470	0.293050	0.494105	0.541341	0.516855	0.468617	0.416531	0.367879

Б) Как еще далее можно уточнить полученный результат?

① Формула трапеций

$$I_h = \frac{h}{2}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + f_9 \right) =$$

$$= \frac{0.125}{2}\begin{pmatrix} 0.000000 + 2\cdot 0.021470 + 2\cdot 0.293050 + 2\cdot 0.494105 + 2\cdot 0.541341 + \\ +2\cdot 0.516855 + 2\cdot 0.468617 + 2\cdot 0.416531 + 0.367879 \end{pmatrix} = 0.366989.$$

Погрешность квадратурной схемы трапеций $O\left(h^2\right)$.

② **Правило Рунге** (метод Рунге-Ромберга-Ричардсона) позволяет получить более высокий порядок точности без значительного увеличения числа арифметических действий.

Пусть для вычисления величины интеграла I есть некоторая формула I_h, позволяющая приближенно получить значение I на равномерной сетке с шагом h. Величину остатка можно представить в виде:

$$I - I_h = \psi_h \cdot h^p + O\left(h^{p+1}\right), \qquad (1)$$

где p - порядок точности квадратурной формулы, а $\psi_h \cdot h^p$ - главный член погрешности.

Проводя расчет по той же формуле, но на другой сетке с шагом $r\cdot h$, получим другое приближенное значение I_{rh} величины I:

$$I - I_{rh} = \psi_{2h}\cdot (r\cdot h)^p + O\left(h^{p+1}\right), \qquad (2)$$

Вычитая из (2) (1) и полагая, что при малых значениях h постоянные ψ_h и ψ_{2h} близки, т.е. $\psi_h \approx \psi_{2h} = \psi$, получаем

$$I_h - I_{rh} = \psi\cdot\left(r^p - 1\right)\cdot h^p + O\left(h^{p+1}\right).$$

Т.о., пользуясь расчетом на сетке с шагом $r\cdot h$, удается оценить главный член погрешности на первоначальной сетке с шагом h:

$$\psi\cdot h^p = \frac{I_h - I_{rh}}{r^p - 1} + O\left(h^{p+1}\right) \text{ -} \qquad (3)$$

обобщенная поправка Ричардсона.

☺ Если теперь подставить найденную погрешность (3) в (1), то получим результат с более высокой степенью точности:

$$I = I_h + \frac{I_h - I_{rh}}{r^p - 1} + O\left(h^{p+1}\right) = \frac{r^p I_h - I_{rh}}{r^p - 1} + O\left(h^{p+1}\right). \qquad (4)$$

$$I_{2h} = \frac{2h}{2}\left(f_1 + 2f_3 + 2f_5 + 2f_7 + f_9 \right) = 0.125\left(0.000000 + 2\cdot 0.293050 + 2\cdot 0.541341 + 2\cdot 0.468617 + 0.367879\right) =$$

$$= 0.371737.$$

$$I_R = \frac{2^2 I_h - I_{2h}}{2^2 - 1} + O\left(h^{p+1}\right) = \frac{4I_h - I_{2h}}{3} + O\left(h^{p+1}\right) = 0.365406.$$

③ Следует заметить, что

$$I_R \simeq \frac{4I_h - I_{2h}}{3} = \frac{4}{3}\frac{h}{2}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + f_9 \right) - \frac{1}{3}h\left(f_1 + 2f_3 + 2f_5 + 2f_7 + f_9 \right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[2\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + f_9 \right) - \left(f_1 + 2f_3 + 2f_5 + 2f_7 + f_9 \right)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + 4f_6 + 2f_7 + 4f_8 + f_9 \right]$$

есть не что иное, как квадратурная формула парабол (формула Симпсона) и ☺

$$I_S = I_R = 0.365406.$$

④ Полученный результат можно уточнить, применяя, например, еще раз правило Рунге к уже уточненным значениям (***алгоритм Ромберга***) $I_{R_h} \simeq \dfrac{4I_h - I_{2h}}{3}$ и $I_{R_{2h}} \simeq \dfrac{4I_{2h} - I_{4h}}{3}$.