Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2022/2023 уч.г. (все кроме ФРКТ и ФПМИ(ФИВТ))

№ группы	Фамилия И.О. студента	Сумма очков	Баллы БРС	Подпись преподавателя

1. (3) Функцию

$$f(z)=\frac{z^3-2iz^2+7z-8i}{z^2-2iz+3}$$

разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2i)$ в кольце, содержащем точку $z=-1$. Описать кольцо сходимости полученного ряда.

2. (5) Найти особые точки функции

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh}^2\left(z-i\left(\pi+\dfrac{1}{i\pi+\ln\frac{\pi}{2}}\right)\right)}{\left(\sin\left(e^{\frac{i}{z}}\right)+1\right)^3},$$

определить их тип, для полюсов установить их порядок.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы 3, 4, 5:

3. (3) $$\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{z^2+2iz-4-4i}{(z-2i)(z-2)^3}\sin\frac{2}{z}dz.$$

4. (4) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(3-x)\operatorname{ch}(3i-xi)}{x^2-4x+7}dx.$$

5. (4) $$\int\limits_{-2}^{0}\frac{x+1}{x-1}\frac{dx}{\sqrt[5]{(x+2)^3x^2}}.$$

6. (5) Обосновать существование регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2+4z)$ в плоскости с разрезом $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ при $\gamma_1=\{z:|z+2-i|=\sqrt{5},\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$, $\gamma_2=\{z:\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Im}z\le 0\}$ и вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+2+i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{h(z)-\ln 8-i3\pi},$$

где $h(z)\in\operatorname{Ln}(z^2+4z)$ - регулярная ветвь, удовлетворяющая условию $\operatorname{Im}h(5)=0$.

МФТИ–21

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С Положением ознакомлен:____ (Подпись студента)

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2022/2023 уч.г.(кроме ФРКТ и ФПМИ(ФИВТ))
Ответы

Вариант 21

1. (3) $f(z)=i+\frac{4}{3}(z-2i)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{(3i)^{n+1}}(z-2i)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}(i)^{-n-1}(z-2i)^n$, $1<\left|(z-2i)\right|<3$.

2. (5) $$\left.\begin{aligned} z_{n,k}&=\frac{i}{\ln\left|2\pi n-\frac{\pi}{2}\right|+2\pi ki}, n>0, k\in\mathbf{Z};\\ z_{n,k}&=\frac{i}{\ln\left|2\pi n-\frac{\pi}{2}\right|+(\pi+2\pi k)i}, n\le 0, k\in\mathbf{Z}, (n;k)\ne(0;0);\end{aligned}\right\}$$ - полюсы порядка 6,

$z=\frac{i}{\ln\frac{\pi}{2}+i\pi}$ - полюс порядка 4, $z=\infty$ - С.О.Т., $z=0$ - Н.О.Т. (предельная точка полюсов).

3. (3) $I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=2}f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)\right)$, $f(z)=\frac{z+2+2i}{(z-2i)(z-2)^2}\sin\frac{2}{z}$.

$\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=0$, $\operatorname*{res}_{z=2}f(z)=-\left(\frac{i-2}{4}\sin 1+\frac{1+3i}{4}\cos 1\right)$. $\boxed{I=-\frac{\pi}{2}\left((3-i)\cos 1+(1+2i)\sin 1\right)}$

4. (4) $I=\operatorname{Re}\left[2\pi i\operatorname*{res}_{z=2+i\sqrt{3}}\left(\frac{(3-z)}{z^2-4z+7}e^{i(z-3)}\right)\right]=\boxed{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\cos 1-\sqrt{3}\sin 1\right)e^{-\sqrt{3}}}$

5. (4) $F(z)=\frac{z+1}{(z-1)g(z)}$, $g(z)\in\left\{\sqrt[5]{f(z)}\right\}$, $z\in\mathbf{C}\setminus[-2,0]$ - регулярная ветвь.

$f(z)=(z+2)^3z^2$, $g(1)=3^{\frac{3}{5}}$, $I\left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{\infty}F+\operatorname*{res}_{1}F\right)$

$\operatorname*{res}_{\infty}F=-1$, $\operatorname*{res}_{1}F=\frac{2}{3^{3/5}}$. $\boxed{I=\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}\left(1-\frac{2}{3^{3/5}}\right)}$.

6. (5) $z=-2\pm 2i$ - нули знаменателя. $z=(-2-2i)\in B_{\frac{3}{2}}(-2-i)$ - полюс 1 порядка.

$\operatorname*{res}_{-2-2i}\frac{1}{h(z)-\ln 8-i3\pi}=\frac{2}{i}$. $\boxed{I=4\pi}$.