2④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+3+5i)$ функцию $f(z)=\dfrac{16-z^2}{z(z+4i)^2}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=-1-i$. Указать границы кольца сходимости.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z=0$. Получаем простой корень: $z_1=0$.

Находим корни уравнения $(z+4i)^2=0$: $z_{2,3}=-4i$. Получаем кратные корни: $z_2=-4i$ и $z_3=-4i$.

② Точки $z_1=0$ и $z_{2,3}=-4i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{16-z^2}{z(z+4i)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+4i}+\frac{C}{(z+4i)^2}=\frac{A(z+4i)^2+Bz(z+4i)+Cz}{z(z+4i)^2}=\frac{A(z^2+8zi-16)+B(z^2+4zi)+Cz}{z(z+4i)^2}$$

$z^0:\ -16A=16 \quad \to \quad A=-1 \quad \searrow$

$z^1:\ 8iA+4iB+C=0 \quad \to \quad 4iB+C=8i \quad \searrow$

$\downarrow$

$z^2:\ A+B=-1 \quad \to \quad B=0 \quad \to \quad C=8i$

$$\boxed{f(z)=\frac{-1}{z}+\frac{8i}{(z+4i)^2}}.$$

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z+3+5i=w$ или $z=w-3-5i$:

$$f(w)=\frac{-1}{w-3-5i}+\frac{8i}{(w-3-i)^2}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,

$\sqrt{10}<|w|<|3+5i|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$,

$|w|>\sqrt{34}$.

⑤ При $z=-1-i$ получаем $w=2+4i$, $|w|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $\sqrt{10}<|w|<\sqrt{34}$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|3+i|<|w|<|3+5i|$.

❶ $$\frac{-1}{w-3-5i}=\frac{-1}{-3-5i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w}{3+5i}}=\frac{1}{3+5i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{3+5i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{(3+5i)^{n+1}}$$

❷ $$\frac{8i}{(w-3-i)^2}=\frac{8i}{w^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{3+i}{w}\right)^2}=\frac{8i}{w^2}\cdot\left[\frac{1}{1-\dfrac{3+i}{w}}\right]'_{\frac{3+i}{w}}=\frac{8i}{w^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+i}{w}\right)^n\right]'_{\frac{3+i}{w}}=\frac{8i}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3+i}{w}\right)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8in(3+i)^{n-1}}{w^{n+1}}.$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=-1-i$ $\left(\sqrt{10}<|z+3+5i|<\sqrt{34}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3+5i)^n}{(3+5i)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8in(3+i)^{n-1}}{(z+3+5i)^{n+1}}$$