Исследовать на А-устойчивость одношаговый метод:
$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h}=\frac{f(x_{m+1},y_{m+1})+3f(x_m,y_m)}{4}.$$

♿ *Модельное уравнение* (получающееся при линеаризации):
$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h}=\lambda\frac{y_{m+1}+3y_m}{4},$$
или, полагая $h\lambda=z$,
$$(4-z)y_{m+1}-(4+3z)y_m=0.$$
Ему соответствует характеристическое уравнение $(4-z)q-(4+3z)=0$.

Решение характеристического уравнения $q=\dfrac{4+3z}{4-z}$.

$|q|<1$, т.е. $|4+3z|<|4-z|$ и можно предполагать, что область устойчивости лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости $z=x+iy$.

Границей области устойчивости будет множество таких точек $z=4\dfrac{q-1}{q+3}$, для которых

$|q|=1$, т.е. $q=e^{i\varphi}$: $z^*=4\dfrac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}+3}=4\dfrac{\cos\varphi-1+i\sin\varphi}{\cos\varphi+3+i\sin\varphi}=4\dfrac{(\cos\varphi-1+i\sin\varphi)(\cos\varphi+3-i\sin\varphi)}{(\cos\varphi+3)^2+\sin^2\varphi}$

$=4\dfrac{2(\cos\varphi-1)+i4\sin\varphi}{(\cos\varphi+3)^2+\sin^2\varphi}$.

Т.к. $\operatorname{Re}z^*\le 0$, то вся левая полуплоскость не может являться областью устойчивости схемы, поэтому метод не А-устойчив.

Замечание. При $z=1$ $q=\dfrac{7}{3}>1$ - схема неустойчива. Область устойчивости внутри контура.

Исследовать на А-устойчивость схему четвертого порядка: $\dfrac{25y_m-48y_{m-1}+36y_{m-2}-16y_{m-3}+3y_{m-4}}{12h}=f(x_m,y_m).$

Метод Гира, чисто неявный.

♿ *Модельное уравнение* (получающееся при линеаризации):

$$25y_m-48y_{m-1}+36y_{m-2}-16y_{m-3}+3y_{m-4}=12h\lambda y_m, \tag{1}$$

или, полагая $h\lambda=z$,

$$25y_m-48y_{m-1}+36y_{m-2}-16y_{m-3}+3y_{m-4}=12zy_m.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение

$$(25-12z)q^4-48q^3+36q^2-16q+3=0. \tag{2}$$

Чтобы определить область устойчивости, нам нужно найти множество точек G комплексной плоскости $z=u+iv=h\operatorname{Re}\lambda+ih\operatorname{Im}\lambda$, для которых все корни (2) не превосходят по модулю единицу.

Соответственно, границей области G Является множество таких точек $z=\lambda h\in C$, для которых $|q|<1$.

Для этого выразим параметр z через переменную q:

$$z=\frac{25-48q^{-1}+36q^{-2}-16q^{-3}+3q^{-4}}{12}. \tag{3}$$

Заметим, что если $|q|=1$, то $q=e^{-i\varphi}$, и (3) можно записать в виде:

$$z=\frac{25-48e^{i\varphi}+36e^{i2\varphi}-16e^{i3\varphi}+3e^{i4\varphi}}{12}. \tag{4}$$

При изменении аргумента φ от 0 до 2π точка z описывает замкнутую кривую Γ, симметричную относительно действительной оси $(\operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\bar{z})$.

Заметим, что:

$q=2$ соответствует области неустойчивости. При этом

$$z(2)=\frac{25-48\cdot2^{-1}+36\cdot2^{-2}-16\cdot2^{-3}+3\cdot2^{-4}}{12}=\frac{131}{192}.$$

$q=\frac{1}{2}$ соответствует области устойчивости. При этом

$$z\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25-48\cdot2^{1}+36\cdot2^{2}-16\cdot2^{3}+3\cdot2^{4}}{12}=-\frac{7}{12}.$$ (Т.е. надежда на А-устойчивость есть.)

$\operatorname{Re}q\in[-1;1]$ $\quad z(1)=\dfrac{25-48+36-16+3}{12}=0$[1],

$z(-1)=\dfrac{25+48+36+16+3}{12}=\dfrac{32}{3}$, т.е. область устойчивости представляет собой внешность кривой Γ.

1 способ (графический).

Воспользоваться соответствующей программой и нарисовать кривую Γ.

2 способ (аналитический).

Перепишем (4) в виде (выделив вещественную и мнимую часть параметра z):

[1] Т.о. граница области устойчивости проходит, через начало координат. Этот результат в данной задаче получен случайно – вообще говоря, надо проводить соответствующее исследование.

$$z=\frac{25-48\cos\varphi+36\cos 2\varphi-16\cos 3\varphi+3\cos 4\varphi}{12}+ \\ +i\frac{-48\sin\varphi+36\sin 2\varphi-16\sin 3\varphi+3\sin 4\varphi}{12} \qquad (5)$$

Введем обозначение: $x=\cos\varphi$. Тогда $\sin\varphi=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Тогда,

учитывая что $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi-1 = 2x^2-1$,

$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi-3\cos\varphi = 4x^3-3x$,

$\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi-8\cos^2\varphi+1 = 8x^4-8x^2+1$,

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$,

$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi-4\sin^3\varphi = \sin\varphi\left[4\cos^2\varphi-1\right] = \pm\left(4x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}$,

$\sin 4\varphi = \sin\varphi\left[8\cos^3\varphi-4\cos\varphi\right] = \pm\left(8x^3-4x\right)\sqrt{1-x^2}$,

получим:

$$z=\frac{25-48x+36\left(2x^2-1\right)-16\left(4x^3-3x\right)+3\left(8x^4-8x^2+1\right)}{12}+ \\ \pm i\frac{-48+36\cdot 2x-16\left(4x^2-1\right)+3\left(8x^3-4x\right)}{12}\sqrt{1-x^2}.$$

Раскрывая скобки, находим:

$$z=\frac{-8+48x^2-64x^3+24x^4}{12}\pm i\frac{-32+60x-64x^2+24x^3}{12}\sqrt{1-x^2}$$

или

$$z=-\frac{2}{3}\left(1-6x^2+8x^3-3x^4\right)\pm\frac{i\sqrt{1-x^2}}{3}\left(-8+15x-16x^2+6x^3\right). \qquad (6)$$

Заметим, что $x\in[-1;\,1]$.

Заметим также, что если $\operatorname{Re} z\ge 0$, то метод А-устойчив.

Найдем $\min\operatorname{Re} z$, т.е. $\min\limits_{x\in[-1;\,1]}\left(-\frac{2}{3}\left(1-6x^2+8x^3-3x^4\right)\right)$.

Итак: $f(x)=-\frac{2}{3}\left(1-6x^2+8x^3-3x^4\right)$,

$$f'(x)=\left(-\frac{2}{3}\left(1-6x^2+8x^3-3x^4\right)\right)' = \left(-\frac{2}{3}\left(-12x+24x^2-12x^3\right)\right) = \\ = 8x\left(1-2x+x^2\right) = 8x(1-x)^2.$$

$f(-1)=-\frac{2}{3}(1-6-8-3)=\frac{32}{3}$,

$f(0)=-\frac{2}{3}$,

$f(1)=-\frac{2}{3}(1-6+8-3)=0$.

$\min\limits_{x\in[-1;\,1]} f(x)=\min\{f(-1),\ f(0),\ f(1)\} = f(0)=-\frac{2}{3}$ <0

 метод не А-устойчив.

Исследуем метод на A(α)-устойчивость.

Согласно (6) $u = \operatorname{Re} z = -\dfrac{2}{3}\left(1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4\right)$,

$$v = \operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\left(-8 + 15x - 16x^2 + 6x^3\right).$$[2]

С одной стороны, уравнение касательной, проходящей через начало координат $v = u\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

с другой стороны, угол наклона касательной определяется соотношением: $\mathrm{tg}\,\alpha = v'_u = \dfrac{v'_x}{u'_x}$.

Отсюда получаем условие касания прямой, проходящей через начало координат, с границей области устойчивости Γ:

$$\frac{v}{u} = \frac{v'_x}{u'_x}. \tag{7}$$

$u'_x = 8x(1-x)^2$,

$$v'_x = \frac{-x}{3\sqrt{1-x^2}}\left(-8 + 15x - 16x^2 + 6x^3\right) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\left(15 - 32x + 18x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\left[x\left(8 - 15x + 16x^2 - 6x^3\right) + \left(1-x^2\right)\left(15 - 32x + 18x^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\left[8x - 15x^2 + 16x^3 - 6x^4 + 15 - 32x + 18x^2 - 15x^2 + 32x^3 - 18x^4\right] =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\left[15 - 24x - 12x^2 + 48x^3 - 24x^4\right] = = \frac{5 - 8x - 4x^2 + 16x^3 - 8x^4}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Т.о.,

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\left(-8 + 15x - 16x^2 + 6x^3\right)}{3\left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4\right)} = \frac{5 - 8x - 4x^2 + 16x^3 - 8x^4}{8x(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}. \tag{8}$$

Заметим, что $\left.\left(1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4\right)\right|_{x=1} = 0$, т.е. $\left(1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4\right) = (1-x)\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right)$,

где $\begin{cases} a = 1, \\ b - a = 0, \\ c - b = -6, \\ d - c = 8, \\ -d = -3. \end{cases}$ Т.е. $1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4 = (1-x)\left(1 + x - 5x^2 + 3x^3\right)$.

Но $\left.\left(1 + x - 5x^2 + 3x^3\right)\right|_{x=1} = 0$ и снова $1 + x - 5x^2 + 3x^3 = (1-x)\left(a + bx + cx^2\right)$, где $\begin{cases} a = 1, \\ b - a = 1, \\ c - b = -5, \\ c = -3. \end{cases}$

Т.е. $\left(1 + x - 5x^2 + 3x^3\right) = (1-x)\left(1 + 2x - 3x^2\right)$, $1 + 2x - 3x^2 = (1+3x)(1-x)$, откуда окончательно $1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4 = (1+3x)(1-x)^3$, и (8) принимает вид:

$$-\frac{\left(1-x^2\right)\left(-8 + 15x - 16x^2 + 6x^3\right)}{2(1-x)(1+3x)} = \frac{5 - 8x - 4x^2 + 16x^3 - 8x^4}{8x}$$

или

[2] Рассматриваем нижнюю полуплоскость, т.к. кривая Γ, симметрична относительно действительной оси.

$$-4x(1+x)\left(-8+15x-16x^2+6x^3\right)=\left(5-8x-4x^2+16x^3-8x^4\right)(1+3x).$$

Раскрываем скобки:

$$32x-60x^2+64x^3-24x^4+32x^2-60x^3+64x^4-24x^5=$$
$$5-8x-4x^2+16x^3-8x^4+15x-24x^2-12x^3+48x^4-24x^5,$$

или

$$32x-28x^2+4x^3+40x^4=5+7x-28x^2+4x^3+40x^4,$$

т.е.

$$25x=5 \text{ или } x=\frac{1}{5}.$$

$$u\Big|_{x=\frac{1}{5}}=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{8}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^3=-\frac{16\cdot 64}{625\cdot 3},$$

$$v\Big|_{x=\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\left(-8+15\frac{1}{5}-16\left(\frac{1}{5}\right)^2+6\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)}{3}=\frac{\frac{\sqrt{24}}{5}\left(-5\cdot 125-16\cdot 5+6\right)}{3\cdot 125}=$$

$$=\frac{2\sqrt{6}\left(-5\cdot 141+6\right)}{3\cdot 625}=-\frac{2\sqrt{6}\cdot 699}{3\cdot 625}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v}{u}\Big|_{x=\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{6}\cdot 699}{16\cdot 64}=\frac{\sqrt{6}\cdot 699}{512}\approx 3.344\approx 73.35^o$$

метод A(α)-устойчив, $\alpha\approx 73.35^o$