Получите чисто неявный метод (или метод ФДН) 3-го порядка точности для численного решения задачи Коши для ОДУ вида:
$\dot{u} = t \cdot \operatorname{ch} t,\ t \in [0,1], u(0) = 1.$

ФДН – формулы дифференцирования назад.

Общий вид ФДН – метода (чисто неявного метода) таков[1]: $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j u_{m+1-j} = f(t_{m+1}, u_{m+1}).$

Используем метод неопределенных коэффициентов:

$$au_{m+1} + bu_m + cu_{m-1} + du_{m-2} = f_{m+1}.$$

Из разложения по формуле Тейлора:

$$u_m = u_{m+1} + (-h)u'_{m+1} + \frac{(-h)^2}{2}u''_{m+1} + \frac{(-h)^3}{6}u'''_{m+1} + O(h^4),$$

$$u_{m-1} = u_{m+1} + (-2h)u'_{m+1} + \frac{(-2h)^2}{2}u''_{m+1} + \frac{(-2h)^3}{6}u'''_{m+1} + O(h^4),$$

$$u_{m-2} = u_{m+1} + (-3h)u'_{m+1} + \frac{(-3h)^2}{2}u''_{m+1} + \frac{(-3h)^3}{6}u'''_{m+1} + O(h^4).$$

Тогда

$$\begin{aligned} au_{m+1} + b\left(u_{m+1} - hu'_{m+1} + \frac{h^2}{2}u''_{m+1} - \frac{h^3}{6}u'''_{m+1} + O(h^4)\right) &+ \\ c\left(u_{m+1} - 2hu'_{m+1} + 2h^2u''_{m+1} - \frac{4h^3}{3}u'''_{m+1} + O(h^4)\right) &+ \\ d\left(u_{m+1} - 3hu'_{m+1} + \frac{9h^2}{2}u''_{m+1} - \frac{9h^3}{2}u'''_{m+1} + O(h^4)\right) &= f_{m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a+b+c+d)u_{m+1} - hu'_{m+1}(b+2c+3d) + \\ &h^2u''_{m+1}\left(\frac{b}{2} + 2c + \frac{9}{2}d\right) - h^3u'''_{m+1}\left(\frac{b}{6} + \frac{4}{3}c + \frac{9}{2}d\right) + \\ &aO(h^4) + bO(h^4) + cO(h^4) + dO(h^4) = f_{m+1}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы выполнялось дифференциальное уравнение, потребуем:

[1] Вержбицкий. Стр. 615 – 16.7

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+3d=\dfrac{-1}{h} \\ b+4c+9d=0 \\ b+8c+27d=0 \end{cases}, \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+3d=\dfrac{-1}{h} \\ b+4c+9d=0 \\ 4c+18d=0 \end{cases}, \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+3d=\dfrac{-1}{h} \\ b=9d \\ c=-\dfrac{9}{2}d \end{cases}, \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3d=\dfrac{-1}{h} \\ b=9d \\ c=-\dfrac{9}{2}d \end{cases},$$

$$\begin{cases} a=-b-c-d \\ d=\dfrac{-1}{3h} \\ b=\dfrac{-9}{3h} \\ c=\dfrac{9}{6h} \end{cases}, \begin{cases} a=\dfrac{18-9+2}{6h}=\dfrac{11}{6h} \\ d=\dfrac{-2}{6h} \\ b=\dfrac{-18}{6h} \\ c=\dfrac{9}{6h} \end{cases}.$$

Разностное уравнение третьего порядка точности:

$$\frac{11u_{m+1}-18u_m+9u_{m-1}-2u_{m-2}}{6h}=(m+1)h\,\mathrm{ch}((m+1)h),$$

$$u_0=1,$$

$$u_1=u_0+hu_0'+\frac{h^2}{2}u_0''+O(h^3)=\left[1+ht\,\mathrm{ch}\,t+\frac{h^2}{2}(\mathrm{ch}\,t+t\,\mathrm{sh}\,t)\right]\Big|_{t=0}+O(h^3)=$$
$$1+\frac{h^2}{2}+O(h^3),$$

$$u_2=u_0+2hu_0'+2h^2u_0''+O(h^3)=\left[1+2ht\,\mathrm{ch}\,t+2h^2(\mathrm{ch}\,t+t\,\mathrm{sh}\,t)\right]\Big|_{t=0}+O(h^3)=$$
$$1+2h^2+O(h^3)$$