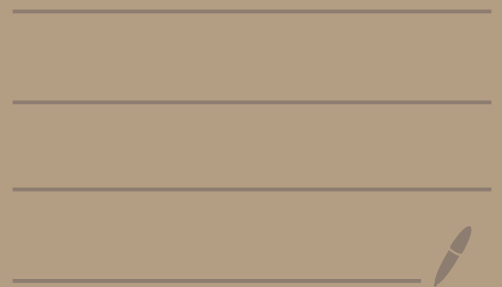


TDKM

5.11.21

Th. Pym



IV Т.3 Найти число корней

многочлена

$$\underline{4z^6 + 4z^3 + 9z - 4} \text{ в круге } |z| < 1.$$

$$f = 9z \quad g = 4(z^6 + z^3 - 1)$$

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

$$z^3 = w$$

$$g(w) = 4(w^2 + w - 1)$$

$$|f|_{\partial D} = 9 \quad |g| = ?$$

$$|g| = 4 |w^2 + w - 1| = 4|w| \left| w + 1 - \frac{1}{w} \right|$$

$$|g|_{\partial D} = 4 \left| w + 1 - \frac{1}{w} \right|, \quad |w|_{\partial D} = 1$$

$$|g|_{\partial D} = 4 |1 + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}| =$$

$$= 4 |1 + 2i \sin \varphi| \leq 4 \sqrt{1 + 4 \sin^2 \varphi} \leq$$

$$\leq 4\sqrt{5}$$

$$9 >? 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |f|_{\partial D} > |g|_{\partial D}$$

$$81 >? 16 \cdot 5 = 80$$

$$f = 9z \text{ — 1 корень} \Rightarrow g$$

многочлена 1 корень

Уб С.К.р.

Применяя теорему Рунге и теорию вычетов вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{iz^3}{4z^3 - 2iz^2 + 1}\right) dz = \underline{I}$$

УДОТХ: кандидатом $z = \infty$ - год
нужно $4z^3 - 2iz^2 + 1$ год

$$h(z) = 4z^3 - 2iz^2 + 1$$

$$\gamma = \partial D = \{z : |z|=1\}$$

$$f(z) = 4z^3$$

$$g(z) = -2iz^2 + 1$$

$$|f|_{\infty} = 4$$

$$1 \leq |g|_{\infty} \leq 3$$

$$|f|_{\infty} < |g|_{\infty} \quad \forall z \in \partial D$$

\Rightarrow у h в круге $|z| < 1$ 3 корня

$$\underline{I} = -2\pi i \operatorname{Res}_{\infty} F(z) = -2\pi i (-C_{-1}) = 2\pi i C_{-1}$$

$$F(z) = \sin \frac{iz^3}{h(z)} =$$

$$= \sin \frac{iz^3}{4z^3 - 2iz^2 + 1} =$$

$$= \sin \frac{i}{4 - \frac{2iz^2 - 1}{z^3}} = \sin \frac{i}{4} \frac{1}{1 - \left(\frac{i}{2z} - \frac{1}{4z^3}\right)}$$

$$= \sin \left[\frac{i}{4} \left(1 + \frac{i}{2z} - \frac{1}{4z^2} + \dots \right) \right] =$$

$$= \sin \left(\frac{i}{4} - \frac{1}{8z} \right) = \sin \frac{i}{4} \cos \frac{1}{8z} - \cos \frac{i}{4} \sin \frac{1}{8z}$$

$$C_{-1} = -\cos \frac{i}{4} \frac{1}{8} = -\operatorname{ch} \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{8}$$

$$\underline{I} = -2\pi i \frac{1}{8} \operatorname{ch} \frac{1}{4} = -\frac{\pi i}{4} \operatorname{ch} \frac{1}{4}$$