ТФКП

5.11.21

Гл. Руше

Th Руше

- G – область ⓥ ограниченная ⓥ односвязная
- $f(z), g(z)$ – регулярные в G
- $\gamma \subset G$ – замкнутый ⓥ простой ⓥ кусочно-гладкий
- $D = \operatorname{int} \gamma$

Если $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \gamma$, то $h(z) = f(z) + g(z)$ и $f(z)$ в D имеют одинаковое количество нулей с учетом их кратности.

15.1(3) Найти число корней

$$h(z) = \overset{1}{z^7} - \overset{5}{5z^4} + \overset{1}{z^2} - \overset{2}{2} = 0$$

в области $D = \{z : |z| < 1\}$

$f = -5z^4 \qquad g = z^7 + z^2 - 2$

$|f|_{\partial D} = 5 \qquad 0 \le |g|_{\partial D} \le 4$

$|f|_{\partial D} > |g|_{\partial D} \Longrightarrow 4$ корня

IV Т.3 Найти число корней многочлена

$4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z|<1$.

$f = 9z \qquad g = 4(z^6 + z^3 - 1)$

$D = \{z : |z| < 1\} \qquad z^3 = w$

$g(w) = 4(w^2 + w - 1)$

$|f|_{\partial D} = 9 \qquad |g| = ?$

$|g| = 4|w^2 + w - 1| = 4|w||w + 1 - \frac{1}{w}|$

$|g|_{\partial D} = 4|w + 1 - \frac{1}{w}|, \quad |w|_{\partial D} = 1$

$w = e^{i\varphi}$

$|g|_{\partial D} = 4|1 + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}| =$

$= 4|1 + 2i\sin\varphi| \leq 4\sqrt{1 + 4\sin^2\varphi} \leq$

$\leq 4\sqrt{5}$

$9 \overset{?}{>} 4\sqrt{5} \qquad \Rightarrow |f|_{\partial D} > |g|_{\partial D}$

$81 \overset{?}{>} 16 \cdot 5 = 80$

$f = 9z$ — 1 корень $\Rightarrow$ у многочлена 1 корень

Из с.к.р.

Применяя теорему Руше и теорию вычетов вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{iz^3}{4z^3-2iz^2+1}\right)dz = I$$

ИОТОХ: кандидаты $z=\infty$ – УОТ

нули $4z^3-2iz^2+1$ СОТы

$$h(z) = 4\overset{4}{z^3} - 2i\overset{2}{z^2} + \overset{1}{1}$$

$$\gamma = \partial D = \{z : |z|=1\}$$

$$f(z) = 4z^3 \qquad g(z) = -2iz^2+1$$

$$|f|_{\partial D} = 4 \qquad 1 \le |g|_{\partial D} \le 3$$

$$|f|_{\partial D} < |g|_{\partial D} \quad \forall z \in \partial D$$

$\Longrightarrow$ у h в круге $|z|<1$ 3 корня

$$I = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} F(z) = -2\pi i(-C_{-1}) = 2\pi i C_{-1}$$

$$F(z) = \sin\frac{iz^3}{h(z)} =$$

$$= \sin\frac{iz^3}{4z^3-2iz^2+1} =$$

$$= \sin\frac{i}{4-\frac{2iz^2-1}{z^3}} = \sin\frac{i}{4}\frac{1}{1-\left(\frac{i}{2z}-\frac{1}{4z^3}\right)} -$$

$$= \sin\left[\frac{i}{4}\left(1 + \frac{i}{2z} - \frac{1}{1z^3} + \ldots\right)\right] =$$

$$= \sin\left(\frac{i}{4} - \frac{1}{8z}\right) = \sin\frac{i}{4}\cos\frac{1}{8z} - \cos\frac{i}{4}\sin\frac{1}{8z}$$

$$C_{-1} = -\cos\frac{i}{4}\,\frac{1}{8} = -ch\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{8}$$

$$I = -2\pi i\,\frac{1}{8}\,ch\frac{1}{4} = -\frac{\pi i}{4}\,ch\frac{1}{4}$$