2003/2004 31

5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \sqrt[5]{\dfrac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \dfrac{1}{x}\,dx$.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[5]{\dfrac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[1,2]$, что проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [1, 2] принимает значения арифметического корня $\sqrt[5]{\dfrac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \geq 0$, $x\in[1,2]$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[5]{\dfrac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[1,2]$ такую, что ее предел из верхней полуплоскости в точках $x\in(1,2)$ равен

$$g(x+i0)=\sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}>0\,. \tag{1}$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt[5]{\left|\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}\left(3\Delta_\gamma \arg(2-z)-3\Delta_\gamma(z-1)\right)}}^{\,3} \text{ -} \tag{2}$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x\in(1,2)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [1, 2], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)}=\sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}\left(3\Delta_\gamma \arg(2-z)-3\Delta_\gamma(z-1)\right)}=g(x+i0)e^{\frac{i}{5}(3\cdot 0-3\cdot 2\pi)}\,{}^{4}=\boxed{g(x+i0)e^{-\frac{i6\pi}{5}}} \tag{3}$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{1\varepsilon}$ и $C_{2\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках 1 и 2 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[1+\varepsilon,2-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon \overset{\Delta}{=} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$, где $f(z)\overset{\Delta}{=}\dfrac{g(z)}{z}$.

---

[1] $\sqrt[5]{\dfrac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}=\sqrt[5]{\left|\dfrac{(2-z)^3}{(z-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}\left(3\varphi_{01}+3\Delta_\gamma \arg(2-z)-3\varphi_{02}-3\Delta_\gamma(z-1)+2\pi k\right)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] $g(x+i0)=\sqrt[5]{\left|\dfrac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}(3\varphi_{01}-3\varphi_{02}+2\pi k)}=\sqrt[5]{\dfrac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}=\sqrt[5]{\dfrac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}e^{i2\pi l}$, т.е. $\dfrac{(3\varphi_{01}-3\varphi_{02}+2\pi k)}{5}=2\pi l$.

[4] или $g(x+i0)e^{\frac{i}{5}(3\cdot(-2\pi)-3\cdot 0)}$.

По теореме о вычетах[5], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]^6 = \left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) f(z)dz . \quad (4)$$

④ Точка $z=0$ ПП (П[1]) – простой полюс[7] (полюс первого порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = g(0)^9 = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-0)^3}{(0-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}(3\cdot 0-3\cdot\pi)} = \sqrt[5]{8}e^{-\frac{i3\pi}{5}} .$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[10]) разложим[11] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X)=\frac{g(X)}{X}=$

$$\frac{1}{X}\sqrt[5]{\left|\frac{(2-X)^3}{(X-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}(3\cdot(-\pi)-3\cdot 0)} = \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(\frac{X-2}{X-1}\right)^3}e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(\frac{1-\frac{2}{X}}{1-\frac{1}{X}}\right)^3}e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(\left(1-\frac{2}{X}\right)\left(1+\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\right)^3}e^{-\frac{i3\pi}{5}}$$

$$= \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(1-\frac{2}{X}+\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^3}e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\left(1-\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^{\frac{3}{5}}e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{-\frac{i3\pi}{5}} =$$

$\left(\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{-\frac{i3\pi}{5}}$. По теореме единственности[12] имеем: $f(z)=\left(\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right)e^{-\frac{i3\pi}{5}}$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=e^{-\frac{i3\pi}{5}}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -e^{-\frac{i3\pi}{5}}$[13].

---

[5] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f$.

[6] Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: $\varnothing$, особые точки знаменателя: $\varnothing$ (**<u>в *G*!!!</u>**)

[7] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

[10] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[11] $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

[12] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0$ $\forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области G.

[13] $\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

Таким образом, $J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=0}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z)\right] = 2\pi i\left[\sqrt[5]{8}e^{-\frac{i3\pi}{5}} - e^{-\frac{i3\pi}{5}}\right] = 2\pi i\left[\sqrt[5]{8}-1\right]e^{-\frac{i3\pi}{5}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{1\varepsilon} = \{z : |z-1| = \varepsilon\}$ и $C_{2\varepsilon} = \{z : |z-2| = \varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \sqrt[5]{\frac{|1+\varepsilon|^3}{|\varepsilon|^3}} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)} \varepsilon d\varphi \le A \cdot \varepsilon^{\frac{2}{5}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \sqrt[5]{\frac{|\varepsilon|^3}{|1-\varepsilon|^3}} \cdot \frac{1}{(2-\varepsilon)} \varepsilon d\varphi \le B \cdot \varepsilon^{\frac{8}{5}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x} dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{2-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{g(x-i0)}{x} dx = \int_{2-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-\frac{i6\pi}{5}} \cdot \frac{g(x+i0)}{x} dx = -e^{-\frac{i6\pi}{5}} \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{g(x+i0)}{x} dx = -e^{-\frac{i6\pi}{5}} \int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[\sqrt[5]{8}-1\right]e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \left(1 - e^{-\frac{i6\pi}{5}}\right) J,$$

т.е. $\pi\left[\sqrt[5]{8}-1\right] = \dfrac{\left(e^{\frac{i3\pi}{5}} - e^{-\frac{i3\pi}{5}}\right)}{2i} J$, $J = \dfrac{\pi\left[\sqrt[5]{8}-1\right]}{\sin\frac{3\pi}{5}}$

Ответ: $\boxed{\int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\pi\left[\sqrt[5]{8}-1\right]}{\sin\frac{3\pi}{5}}}$