2003/2004 32

5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}}\cdot\frac{1}{x}dx$.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[5]{(z+2)^4(z+1)}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[-2,-1]$, что проверяется[2].

② Замечая, что при $x\in[-2,-1]$ под знаком корня стоит отрицательное выражение[3] , а при $x>-1$ - положительное, выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [-2, -1] прринимает значения арифметического корня $\sqrt[5]{(x+2)^4(-x-1)}\geq 0$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[5]{(z+2)^4(z+1)}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[-2,-1]$ такую, что ее предел из из верхней полуплоскости в точках $x\in(-2,-1)$, т.е. на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [-2, -1] равен

$$g(x+i0)=-\sqrt[5]{(x+2)^4(-x-1)}<0^{4}. \qquad (1)$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt[5]{\left|(z+2)^4(z+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}\left(4\Delta_\gamma\arg(z+2)+\Delta_\gamma(z+1)\right)}}^{5} - \qquad (2)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x\in(-2,-1)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [-2, -1], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}(4\cdot 2\pi+1\cdot 0)}=g(x+i0)e^{\frac{i}{5}(4\cdot 2\pi+1\cdot 0)}{}^{6}=\boxed{g(x+i0)e^{\frac{i8\pi}{5}}} \qquad (3)$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{-2\varepsilon}$ и $C_{-1\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках -2 и -1 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[-2+\varepsilon,-1-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

---

[1] $\sqrt[5]{(z+2)^4(z+1)}=\sqrt[5]{\left|(z+2)^4(z+1)\right|}e^{\frac{i}{5}\left(4\varphi_{01}+4\Delta_\gamma\arg(2+z)+\varphi_{02}+\Delta_\gamma(z+1)+2\pi k\right)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] Например, $\left.\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}\right|_{x=-\frac{3}{2}}=\sqrt[5]{(-1.5+2)^4(-1.5+1)}=\sqrt[5]{(-0.5)^4(-0.5)}=\sqrt[5]{(-0.5)^5}=0.5\sqrt[5]{-1}$

[4] $g(x+i0)=-\sqrt[5]{(x+2)^4(-x-1)}=-\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(-x-1)\right|}=-\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}$

[5] $g(x+i0)=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{\frac{i}{5}(4\varphi_{01}++\varphi_{02}+2\pi k)}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}e^{i2\pi l}$, т.е.

$$\frac{(4\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}{5}=2\pi l$$

[6] или $g(x+i0)e^{\frac{i}{5}(0\cdot 2\pi+1\cdot(-2\pi))}$

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon \overset{\Delta}{=} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$, где $f(z) \overset{\Delta}{=} \dfrac{z-1}{zg(z)}$.

По теореме о вычетах[7], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]^{8} = \left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) f(z)dz. \qquad (4)$$

④ Точка $z=0$ ПП (П[1]) – простой полюс[9] (полюс первого порядка), поэтому вычет[10] в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \frac{-1}{g(0)}^{11} = \frac{-1}{\sqrt[5]{\left|(0+2)^4(0+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}(4\cdot 0+1\cdot(-\pi))}} = \sqrt[5]{2^{-4}}e^{\frac{i\pi}{5}}.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[12]) разложим[13] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X) = \dfrac{X-1}{X\cdot g(X)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{X}\right)}{\sqrt[5]{\left|(X+2)^4(X+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}(4\cdot 0+1\cdot(-\pi))}} = \frac{\left(1-\frac{1}{X}\right)}{X\cdot\sqrt[5]{\left(1+\frac{2}{X}\right)^4\left(1+\frac{1}{X}\right)}e^{i\pi-\frac{i\pi}{5}}} = -\frac{\left(1-\frac{1}{X}\right)}{X\cdot\sqrt[5]{\left(1+\frac{2}{X}\right)^4}\sqrt[5]{1+\frac{1}{X}}e^{-\frac{i\pi}{5}}} =$$

$$-\frac{1}{X}\left(1-\frac{1}{X}\right)\left(1-\frac{4}{5}\frac{2}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{1}{5}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i\pi}{5}} = -\left(\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{9}{5}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i\pi}{5}} =$$

---

7 **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f$.

8 Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: ∅, особые точки знаменателя: ∅ (**<u>в *G*!!!</u>**)

9 **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

10 **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

11 Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

12 **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

13 $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

$\left(-\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i\pi}{5}}$. По теореме единственности[14] имеем: $f(z)=-\frac{1}{z}e^{\frac{i\pi}{5}}+o\left(\frac{1}{z}\right)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=-e^{\frac{i\pi}{5}}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=e^{\frac{i\pi}{5}}$[15].

Таким образом, $J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right] = 2\pi i\left[\sqrt[5]{2^{-4}}e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{i\pi}{5}}\right] = 2\pi i\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]e^{\frac{i\pi}{5}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{-2\varepsilon}=\{z:|z+2|=\varepsilon\}$ и $C_{-1\varepsilon}=\{z:|z+1|=\varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{-2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{-2+\varepsilon-1}{(-2-\varepsilon)\sqrt[5]{\varepsilon^4(-1-\varepsilon)}}\varepsilon d\varphi \le A\cdot\varepsilon^{\frac{1}{5}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{-1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{-1+\varepsilon-1}{(-1-\varepsilon)\sqrt[5]{(2-1-\varepsilon)^4\varepsilon}}\varepsilon d\varphi \le B\cdot\varepsilon^{\frac{4}{5}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{g(x+i0)}\cdot\frac{1}{x}dx = \int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{\frac{i\pi}{5}}}\cdot\frac{1}{x}dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{-1-\varepsilon}^{-2+\varepsilon}\frac{x-1}{g(x-i0)}\cdot\frac{1}{x}dx = -\int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{g(x+i0)e^{\frac{i8\pi}{5}}}\cdot\frac{1}{x}dx = -e^{-\frac{i8\pi}{5}}\int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{g(x+i0)}\cdot\frac{1}{x}dx = -e^{-\frac{i8\pi}{5}}\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]e^{\frac{i\pi}{5}} = \left(1-e^{-\frac{i8\pi}{5}}\right)J,$$

т.е. $e^{\frac{i4\pi}{5}}\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]e^{\frac{i\pi}{5}} = \dfrac{\left(e^{\frac{i4\pi}{5}}-e^{-\frac{i4\pi}{5}}\right)}{2i}J$, $J=-\dfrac{\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]}{\sin\frac{4\pi}{5}}=-\dfrac{\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]}{\sin\frac{\pi}{5}}$

Ответ: $\boxed{\int_{-2}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]}{\sin\frac{\pi}{5}}}$

---

[14] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f: G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0\ \ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области G.

[15] $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.