2003/2004 34

5⑥

Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}} \cdot \frac{1}{x-2}\,dx$.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[7]{z^3(1-z)^4}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[0,1]$, что проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [0, 1] прринимает значения арифметического корня $\sqrt[7]{x^3(1-x)^4} \geq 0$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[7]{z^3(1-z)^4}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[0,1]$ такую, что ее предел из из верхней полуплоскости в точках $x \in (0,1)$, т.е. на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [0, 1] равен

$$g(x+i0) = \sqrt[7]{x^3(1-x)^4} > 0. \qquad (1)$$

$$\boxed{g(z) = \sqrt[7]{\left|z^3(1-z)^4\right|}\, e^{\frac{i}{7}\left(3\Delta_\gamma \arg(z)+4\Delta_\gamma(1-z)\right)}}\,[3] - \qquad (2)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x \in (0,1)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [-2, -1], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)} = \sqrt[7]{\left|x^3(1-x)^4\right|}\, e^{\frac{i}{7}\left(3\Delta_\gamma \arg(z)+4\Delta_\gamma(1-z)\right)} = g(x+i0)e^{\frac{i}{7}(3\cdot 2\pi+4\cdot 0)}\,[4] = \boxed{g(x+i0)e^{\frac{i6\pi}{7}}} \qquad (3)$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{0\varepsilon}$ и $C_{1\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках 0 и 1 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon \overset{\Delta}{=} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$, где $f(z) \overset{\Delta}{=} \frac{z+1}{(z-2)g(z)}$.

По теореме о вычетах[5], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

---

[1] $\sqrt[7]{z^3(1-z)^4} = \sqrt[7]{\left|z^3(1-z)^4\right|}\, e^{\frac{i}{7}\left(3\varphi_{01}+3\Delta_\gamma \arg(z)+4\varphi_{02}+4\Delta_\gamma(1-z)+2\pi k\right)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma} \in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = (2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] $g(x+i0) = \sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}\, e^{\frac{i}{5}(4\varphi_{01}++\varphi_{02}+2\pi k)} = \sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}\, e^{i\pi} = \sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}\, e^{i\pi}e^{i2\pi l}$, т.е.

$$\frac{(4\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}{5} = 2\pi l$$

[4] или $g(x+i0)e^{\frac{i}{7}(3\cdot 0+4\cdot(-2\pi))}$

[5] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=2}{res} f(z)+\underset{z=\infty}{res} f(z)\right]\overset{6}{=}\left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) f(z)dz\,. \qquad (4)$$

④ Точка $z=2$ ПП (П[1]) – простой полюс[7] (полюс первого порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен

$$\underset{z=2}{\mathrm{res}}\, f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\frac{3}{g(2)}\overset{9}{=}\frac{3}{\sqrt[7]{\left|2^3(1-2)^4\right|}e^{\frac{i}{7}(3\cdot 0+4(-\pi))}}=\frac{3e^{\frac{i4\pi}{7}}}{\sqrt[7]{2^3}}\,.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[10]) разложим[11] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty \quad (R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$:

$$f(X)=\frac{X+1}{(X-2)g(X)} = \frac{\left(1+\frac{1}{X}\right)}{\left(1-\frac{2}{X}\right)\sqrt[7]{\left|X^3(1-X)^4\right|}e^{\frac{i}{7}(3\cdot 0+4(-\pi))}} = \frac{\left(1+\frac{1}{X}\right)\left(1-\frac{2}{X}\right)^{-1}}{X\sqrt[7]{\left|\left(1-\frac{1}{X}\right)^4\right|}e^{-\frac{i4\pi}{7}}} =$$

$$\frac{1}{X}\left(1+\frac{1}{X}\right)\left(1+\frac{2}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{1}{X}\right)^{-\frac{4}{7}}e^{\frac{i4\pi}{7}} = \left(\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}\right)\left(1+\frac{2}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1+\frac{4}{7}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i4\pi}{7}} =$$

$\left(\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i4\pi}{7}}$. По теореме единственности[12] имеем: $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{i4\pi}{7}}+o\left(\frac{1}{z}\right)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=e^{\frac{i4\pi}{7}}$, следовательно $\underset{z=\infty}{\mathrm{res}}\, f(z)=-c_{-1}=-e^{\frac{i4\pi}{7}}$[13].

$a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{a_k}{\mathrm{res}}\, f$.

[6] Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: $\varnothing$, особые точки знаменателя: $\varnothing$ (**в *G*!!!**)

[7] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\underset{a}{\mathrm{res}}\, f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

[10] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[11] $\underset{a}{\mathrm{res}}\, f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

[12] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0 \ \ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области *G*.

[13] $\underset{\infty}{\mathrm{res}}\, f=-c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

Таким образом, $J_{\varepsilon} = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=2} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right] = = 2\pi i\left[\frac{3e^{\frac{i4\pi}{7}}}{\sqrt[7]{2^3}} - e^{\frac{i4\pi}{7}}\right] = 2\pi i\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}}-1\right]e^{\frac{i4\pi}{7}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{0\varepsilon} = \{z : |z| = \varepsilon\}$ и $C_{1\varepsilon} = \{z : |z-1| = \varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{-2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon+1}{\sqrt[7]{\varepsilon^3(1-\varepsilon)^4}} \cdot \frac{1}{\varepsilon-2}\varepsilon d\varphi \le A\cdot\varepsilon^{\frac{4}{7}} \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{-1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{1+\varepsilon+1}{\sqrt[7]{(1+\varepsilon)^3(1-(1-\varepsilon))^4}} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon-2}\varepsilon d\varphi \le B\cdot\varepsilon^{\frac{3}{7}} \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{g(x+i0)}\cdot\frac{1}{(x-2)}dx = \int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}}\cdot\frac{1}{(x-2)}dx$$ [14],

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{1-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{x+1}{g(x-i0)}\cdot\frac{1}{(x-2)}dx = -\int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{g(x+i0)e^{\frac{i6\pi}{7}}}\cdot\frac{1}{(x-2)}dx = -e^{-\frac{i6\pi}{7}}\int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{g(x+i0)}\cdot\frac{1}{(x-2)}dx =$$

$$-e^{-\frac{i6\pi}{7}}\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}}-1\right]e^{\frac{i4\pi}{7}} = \left(1-e^{-\frac{i6\pi}{7}}\right)J = \left(1-e^{\frac{i8\pi}{7}}\right)J,$$

т.е. $\pi\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}}-1\right] = \frac{\left(e^{-\frac{i4\pi}{7}}-e^{\frac{i4\pi}{7}}\right)}{2i}J$, $J = -\frac{\pi\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}}-1\right]}{-\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{\pi\left[1-\frac{3}{\sqrt[7]{8}}\right]}{\sin\frac{4\pi}{7}}$

Ответ: $\boxed{\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}}\cdot\frac{1}{x-2}dx = \frac{\pi\left[1-\frac{3}{\sqrt[7]{8}}\right]}{\sin\frac{4\pi}{7}}}$