5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt[4]{x-1}\cdot(x^2+3)}dx$.

📖 ✍ Половинкин$_{\text{н}}$ пример 2 стр. 109 – 111

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначными функциями $\{\mathrm{Ln}(z-1)\}$ и $\{\sqrt[4]{z-1}\}$[1]. Эти функции допускают выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[1,+\infty]$.

② ❶ Выберем регулярную ветвь логарифма, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по лучу $[1, +\infty]$ принимает значения $\ln(x-1)$, $x\in[1,+\infty]$, т.е. обозначим через $f(z)$ регулярную ветвь многозначной функции $\{\mathrm{Ln}(z-1)\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty]$ такую, что ее предел из верхней полуплоскости в точках $x\in[1,+\infty]$ равен

$$f(x+i0)=\ln(x-1). \tag{1}$$

$$\boxed{f(z)=\ln|z-1|+i(\Delta_\gamma \arg(z-1))}\,[2] - \tag{2}$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции f из нижней полуплоскости в точках $x\in[1,+\infty]$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку $[1, +\infty]$, принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{f(x-i0)}=\ln|x-1|+i(\Delta_\gamma \arg(z-1))=\ln|x-1|+i\cdot 2\pi=\boxed{f(x+i0)+i\cdot 2\pi} \tag{3}$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза (контур не может пересекать разрез!!!).

❷ Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по лучу $[1, +\infty]$ принимает значения арифметического корня $\sqrt[4]{x-1}\ge 0$, $x\in[1,+\infty]$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\{\sqrt[4]{z-1}\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty]$ такую, что ее предел из верхней полуплоскости в точках $x\in[1,+\infty]$ равен

$$g(x+i0)=\sqrt[4]{z-1}>0. \tag{4}$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt[4]{|z-1|}e^{\frac{i}{4}\Delta_\gamma \arg(z-1)}}\,[3] - \tag{5}$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (4).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x\in[1,+\infty]$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку $[1, +\infty]$, принимает по формуле (5) значение

$$\boxed{g(x-i0)}=\sqrt[4]{|x-1|}e^{\frac{i}{4}\Delta_\gamma \arg(z-1)}=\sqrt[4]{|x-1|}e^{\frac{i}{4}\cdot 2\pi}\ \sqrt[4]{|x-1|}e^{\frac{i\pi}{2}}=\boxed{i\cdot g(x+i0)} \tag{6}$$

В формуле (6) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

---

[1] $\mathrm{Ln}(z-1)=\ln|z-1|+i\Delta_\gamma \arg(z-1)+i(\arg(z_0-1)+2\pi n)=$

$=\ln|z-1|+i\Delta_\gamma \arg(z-1)+\ln|z_0-1|-\ln|z_0-1|+i(\arg(z_0-1)+2\pi n)=\mathrm{Ln}(z_0-1)+\ln\frac{|z-1|}{|z_0-1|}+i\Delta_\gamma \arg(z-1)=$

$=\ln|z-1|+i\Delta_\gamma \arg(z-1)+iB$

$\sqrt[4]{z-1}=\sqrt[4]{|z-1|}e^{\frac{i}{4}\Delta_\gamma \arg(z-1)}e^{\frac{i}{4}(\arg(z_0-1)+2\pi k)}=\sqrt[4]{|z-1|}e^{\frac{i}{4}\Delta_\gamma \arg(z-1)}\frac{\sqrt[4]{|z_0-1|}}{\sqrt[4]{|z_0-1|}}e^{\frac{i}{4}(\arg(z_0-1)+2\pi k)}=\sqrt[4]{z_0-1}\cdot\sqrt[4]{\left|\frac{z-1}{z_0-1}\right|}e^{\frac{i}{4}\Delta_\gamma \arg(z-1)}=$

$=\sqrt[4]{|z-1|}e^{\frac{i}{4}\Delta_\gamma \arg(z-1)}e^{i\alpha}$

[2] $f(x+i0)=\ln|x-1|+i\cdot 0+iB=\ln(x-1)$, т.е. $B=0$.

[3] $g(x+i0)=\sqrt[4]{|x-1|}e^{\frac{i}{4}\cdot 0}e^{i\alpha}=\sqrt[4]{x-1}$, т.е. $e^{i\alpha}=1$.

③ Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{1\varepsilon}$ и $C_{2\varepsilon}$ радиуса ε и $\frac{1}{\varepsilon}$ с центрами в точках 1 и 0 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $\left[1+\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внутренней части плоскости.

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon \overset{\Delta}{=} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz$, где $F(z) \overset{\Delta}{=} \dfrac{f(z)}{(z^2+3)g(z)}$.

По теореме о вычетах[4], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=i\sqrt{3}}{res} F(z) + \underset{z=-i\sqrt{3}}{res} F(z)\right]\text{[5]} = \left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) F(z)dz. \qquad (7)$$

④ ❶ Точка $z = i\sqrt{3}$ ПП (П[1]) – простой полюс[6] (полюс первого порядка), поэтому вычет[7] в этой точке равен

$$\underset{z=i\sqrt{3}}{\operatorname{res}} F(z) = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \left(z - i\sqrt{3}\right)F(z) = \left.\frac{f(z)\big/g(z)}{\left(z^2+3\right)'}\right|_{z=i\sqrt{3}} = \left.\frac{f(z)\big/g(z)}{2z}\right|_{z=i\sqrt{3}} = \frac{f\left(i\sqrt{3}\right)}{2\cdot i\sqrt{3}\, g\left(i\sqrt{3}\right)}\text{[8]} = \frac{\ln\left|i\sqrt{3}-1\right| + i\frac{2\pi}{3}}{2\cdot i\sqrt{3}\sqrt[4]{\left|i\sqrt{3}-1\right|}e^{\frac{i}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}}{i\cdot 2\sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{6}}}.$$

❷ Точка $z = -i\sqrt{3}$ ПП (П[1]) – простой полюс (полюс первого порядка), поэтому вычет в этой точке равен

$$\underset{z=-i\sqrt{3}}{\operatorname{res}} F(z) = \lim_{z\to -i\sqrt{3}} \left(z + i\sqrt{3}\right)F(z) = \left.\frac{f(z)\big/g(z)}{\left(z^2+3\right)'}\right|_{z=-i\sqrt{3}} = \left.\frac{f(z)\big/g(z)}{2z}\right|_{z=-i\sqrt{3}} = -\frac{f\left(-i\sqrt{3}\right)}{2\cdot i\sqrt{3}\, g\left(-i\sqrt{3}\right)}\text{[9]} =$$

$$= -\frac{\ln\left|-i\sqrt{3}-1\right| + i\frac{4\pi}{3}}{2\cdot i\sqrt{3}\sqrt[4]{\left|-i\sqrt{3}-1\right|}e^{\frac{i}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}}} = -\frac{\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}}{i\cdot 2\sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{3}}}.$$

---

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathrm{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{a_k}{\operatorname{res}} f$.

[5] Особыми точками функции *F* являются: нули знаменателя: $z = \pm i\sqrt{3}$, особые точки числителя: ∅, особые точки знаменателя: ∅ (**в *G*!!!**)

[6] **Определение**. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathrm{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathrm{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

[7] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathrm{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathrm{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\underset{a}{\operatorname{res}} f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[8] Для вычисления $f\left(i\sqrt{3}\right)$ и $g\left(i\sqrt{3}\right)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z = i\sqrt{3}$

Таким образом,

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=i\sqrt{3}}{res}F(z)+\underset{z=-i\sqrt{3}}{res}F(z)\right] = 2\pi i\left[\frac{\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}}{i\cdot 2\sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{6}}} - \frac{\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}}{i\cdot 2\sqrt{3}\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{3}}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\left[\left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{6}} - \left(\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{3}}\right].$$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{1\varepsilon} = \{z : |z-1| = \varepsilon\}$ и $C_{2\varepsilon} = \left\{z : |z| = \frac{1}{\varepsilon}\right\}$:

$$\left|\int_{C_{1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\ln^2\varepsilon + (2\pi)^2}}{\varepsilon^{1/4}}\cdot\frac{1}{(3-\varepsilon^2)}\varepsilon d\varphi \le A\cdot\ln\varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{3}{4}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\ln^2\frac{1}{\varepsilon} + (2\pi)^2}}{\sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}-1}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-3\right)}\frac{1}{\varepsilon}d\varphi \le B\cdot\ln\varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{5}{4}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

⑥ В силу формул (1), (3), (4) и (6) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} F(z)dz = \int_{1+\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt[4]{x-1}\cdot(x^2+3)}dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} I = \int_1^{+\infty}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt[4]{x-1}\cdot(x^2+3)}dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{1/\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{f(x-i0)}{(x^2+3)g(x-i0)}dx = -\int_{1+\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{f(x+i0)+i2\pi}{(x^2+3)i\,g(x+i0)}dx = i\int_{1+\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{\ln(x-1)+i2\pi}{(x^2+3)\sqrt[4]{x-1}}dx$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} iI - \int_1^{+\infty}\frac{2\pi}{(x^2+3)\sqrt[4]{x-1}}dx.$$

⑦ Переходя в формуле (7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство:

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\left[\left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{6}} - \left(\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{3}}\right] = (1+i)I - \int_1^{+\infty}\frac{2\pi}{(x^2+3)\sqrt[4]{x-1}}dx.$$

Т.к. $\operatorname{Im} I = 0$ и $\operatorname{Im}\int_1^{+\infty}\frac{2\pi}{(x^2+3)\sqrt[4]{x-1}}dx = 0$, то

$$I = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\left[\left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{6}} - \left(\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}\right)e^{-\frac{i\pi}{3}}\right]\right) = \quad =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\operatorname{Im}\left[\left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) - \left(\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\left[\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right]$$

Ответ: $\boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}-2\right)\right]}$

---

[9] Для вычисления $f\left(-i\sqrt{3}\right)$ и $g\left(-i\sqrt{3}\right)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z = -i\sqrt{3}$