§ 6. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Автономной системой для функций $x(t)$, $y(t)$ называется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{6.1}$$

где правые части не зависят от переменной t.

Пусть $x = f(t)$, $y = g(t)$ – решение (6.1).

Фазовой траекторией системы (6.1) называется параметрически заданная кривая $x = f(t)$, $y = g(t)$ на плоскости $\mathsf{R}^2_{x,y}$. Направление движения точки с ростом времени принято отмечать стрелкой на траектории.

Фазовым портретом системы называется картина, которую образуют фазовые кривые.

Положением равновесия, или *точкой покоя*, автономной системы дифференциальных уравнений (6.1) называется ее решение вида $x = x_0$, $y = y_0$.

Отметим, что траектория положения равновесия – точка, и $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Определение 1.1. Положение равновесия $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ автономной системы (6.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если

1. $\exists \delta_0 > 0$: $\forall \vec{x}_0 * > 0$ такого, что $\left|\vec{x}_0 * - \vec{a}\right| < \delta_0$ решение автономной системы (6.1) $\vec{x}(t, \vec{x}_0 *)$ с начальными условиями $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 *$ существует на всей полуоси $[t_0, +\infty)$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$: из условия $\left|\vec{x}_0 * - \vec{a}\right| < \delta$ следует, что $\left|\vec{x}(t, \vec{x}_0 *) - \vec{a}\right| < \varepsilon \ \ \forall t \in [t_0, +\infty)$.

Определение 1.2. Положение равновесия $\vec{a}$ автономной системы (6.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно

1. устойчиво по Ляпунову,
2. $\exists\delta^*>0\ :\ \forall\vec{x}(t)\quad \left|\vec{x}(t_0)-\vec{a}\right|<\delta^*\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\vec{x}(t_0)-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

В простейшем случае, когда P, Q линейны, т.е. $P(x,y)=ax+by$, $Q(x,y)=cx+dy$, где $a,\ b,\ c,\ d$ – постоянные, система принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=ax+by\,,\quad \frac{dy}{dt}=cx+dy\,. \tag{6.2}$$

Введем матрицу $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленную из коэффициентов системы (6.2).

Теорема 1.1. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $\vec{x}=\vec{0}$ является асимптотически устойчивым положением равновесия линейной автономной системы (6.2). Если же хоть одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $\vec{x}=\vec{0}$ неустойчиво (по Ляпунову).

6.1. Исследование положений равновесия

Исследование положения равновесия для линейной автономной системы (6.2) проводится по следующей схеме:

1. Сначала находят корни $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения

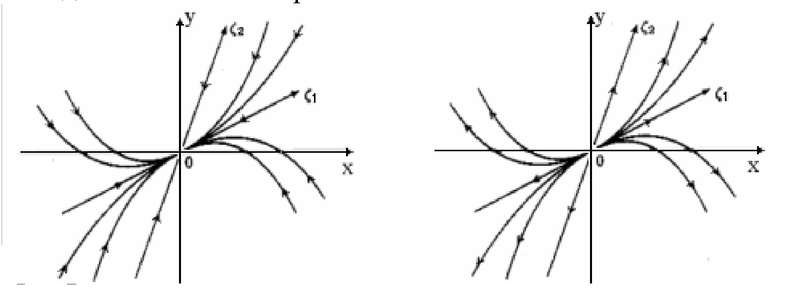
$$\det(A-\lambda E)=0\,. \tag{6.3}$$

Если $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ – линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2, соответственно, то решение системы (6.2) имеет вид $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t}$. Обозначим $\zeta_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\zeta_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$ координаты точки $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в базисе из собственных векторов $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$.

2. ① Если корни вещественные, различные $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ и одного знака $(\lambda_1 \lambda_2 > 0)$, то положение равновесия называется ***узлом.*** Узел называется устойчивым, если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, и неустойчивым, если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Положим для определенности $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$. Устойчивый узел не только устойчив, но и асимптотически устойчив.

В случае $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ обе координаты с ростом t стремятся к нулю, но вторая координата стремится к нулю быстрее. То есть точки по всем интегральным траекториям приближаются к началу координат, а общая касательная для всех траекторий (кроме одной, отвечающей $C_1 = 0$) параллельна вектору $\vec{h}_1$, отвечающему меньшему по абсолютной величине собственному значению λ_1. Кроме того, система уравнений (6.2) имеет фазовые траектории в виде лучей, по которым точки стремятся к началу координат (положению равновесия). Эти лучи параллельны собственными векторами $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ матрицы A. При $t \to -\infty$ траектории приближаются к прямым, параллельным вектору $\vec{h}_2$, удаляясь от начала координат. В случае устойчивого узла движение по фазовым траекториям происходит к положению равновесия.

В случае $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ характер расположения траекторий полностью сохраняется (можно устремить t к $-\infty$ и провести рассуждения, аналогичные для $t \to +\infty$). В случае не-устойчивого узла движение по фазовым траекториям происходит от положения равновесия.



а) б)

Рис. 6.1

Схематически фазовый портрет системы (6.2) в случае а) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ и б) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ показан на рис. 6.1. Здесь и далее ζ_1 и ζ_2 – координаты точки $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в базисе из собственных векторов матрицы A.

② Если корни имеют разные знаки $(\lambda_1 \lambda_2 < 0)$, то положение равновесия называется ***седлом***. Это неустойчивое положение равновесия.

Пусть для определенности $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. С ростом t при $C_2 = 0$ точки на траектории будут приближаться к началу координат вдоль лучей, входящих в начало координат параллельно собственному вектору $\vec{h}_1$, и удаляться от него при $C_1 = 0$ вдоль лучей, исходящих из начала координат параллельно $\vec{h}_2$. Эти траектории, называющиеся сепаратрисами, служат асимптотами траекториям, отвечающим $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, соответственно. Движение по траекториям при $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$ согласуется с движением по асимптотам $O\zeta_1$ и $O\zeta_2$. Схематически фазовый портрет системы (6.2) в этом случае показан на рис. 6.2.

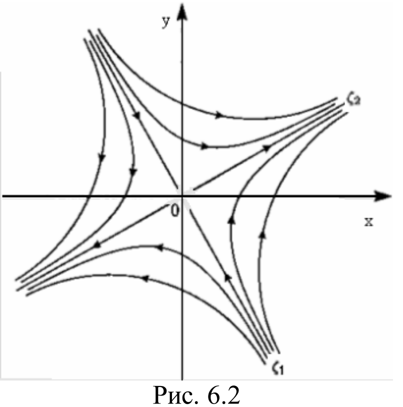
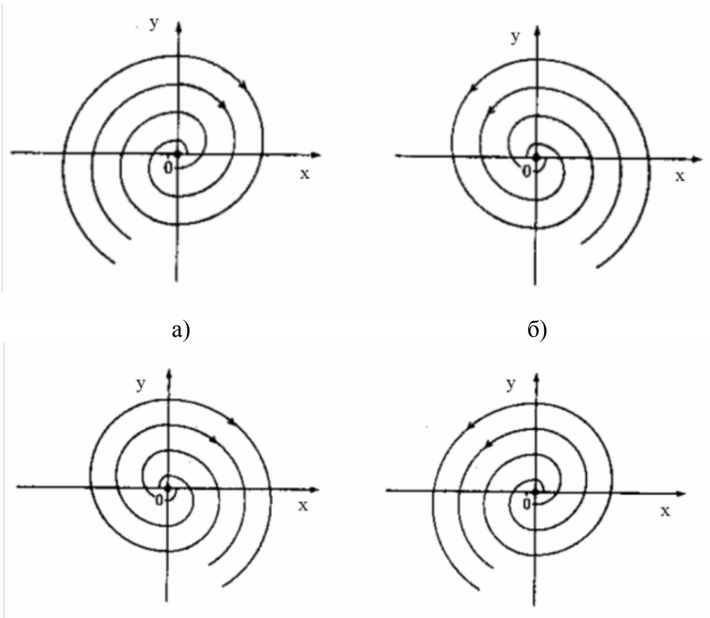


Рис. 6.2

③ Если корни $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ невещественные при $\mu \neq 0$, то положение равновесия называется ***фокусом***. Фокус называется устойчивым, если $\mu < 0$, и неустойчивым, если $\mu > 0$. Устойчивый фокус является также асимптотически устойчивым положением равновесия. Фазовые траектории имеют вид искаженных логарифмических спиралей, закручивающихся вокруг начала координат. Движение по спирали происходит к положению равновесия в случае устойчивого фокуса и от положения равновесия, если фокус неустойчивый. Требуется нарисовать качественную картину, т.е. вдоль какого направления сжата траектория, или по какому направлению она вытянута, определять не нужно. Надо только определить направление закручивания траекторий. Для этого нужно построить в какой-нибудь точке (x, y) вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, определяемый по формулам (6.2).

Схематически фазовый портрет системы (6.2) в случае фокуса изображен на рис. 6.3, причем случаи а) и б) соответствуют устойчивому фокусу, а случаи в) и г) – неустойчивому.



а) б)

в) г)

Рис. 6.3

З а м е ч а н и е 1. В случае фокуса не требуется находить собственные векторы матрицы A.

④ Если корни $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$ чисто мнимые, то положение равновесия называется центром ***центром***. Это положение равновесия при любых значениях ν является устройчивым, но не асимптотичнски устойчивым. Фазовые траектории имеют вид эллипсов с общим осями, пересекающимися в начале координат, и одинаковым соотношением между полуосями. (То есть все эти эллипсы можно перевести друг в друга гомотетией с центром в начале координат.) Так же как и в случае фокуса требуется нарисовать качественную картину, т.е. вдоль какого направления сжата траектория, или по какому направлению она вытянута, определять не нужно. Надо также определить направление движения вдоль траекторий. Для этого опять же нужно построить в какой-нибудь точке $(x,\ y)$ вектор скорости $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$, определяемый по формулам (6.2).

Схематически фазовый портрет системы (6.2) в случае центра изображен на рис. 6.4.

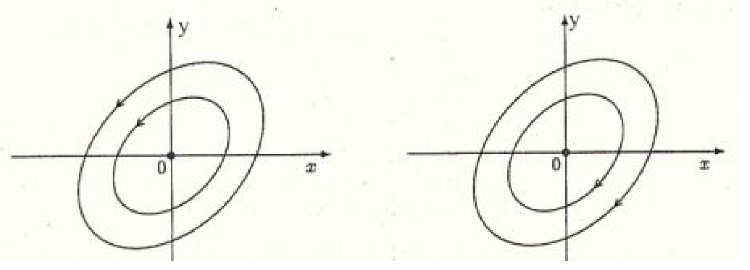


Рис. 6.4

Замечание 2. Как и в случае фокуса здесь не требуется находить собственные векторы матрицы A.

⑤ Кроме перечисленных выше основных положений равновесия различают еще несколько вырожденных случаев, которые мы здесь рассматривать не будем.

6.2. Практические приемы исследования положений равновесия

Теорема 2.1. Если все собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$, где $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ - положение равновесия автономной системы (6.1), имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $\vec{x} = \vec{a}$ является асимптотически устойчивым.

Если же хоть одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $\vec{x} = \vec{a}$ неустойчиво (по Ляпунову).

Для исследования положения равновесия (x_0, y_0) более общей системы (6.1) будем опираться на теорему 2.1. Разложим функции P и Q, если они дифференцируемы, в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (6.1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho), \tag{6.4}$$

при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Перенося начало координат в точку (x_0, y_0), и сделав замену $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, а также отбросив $o(\rho)$, получим линеаризованную систему

$$\frac{du}{dt} = au + bv, \quad \frac{dv}{dt} = cu + dv, \tag{6.5}$$

где постоянные *a, b, c, d* можно вычислить по формулам

$$a=\frac{\partial P}{\partial x}\left(x_0,y_0\right),\; b=\frac{\partial P}{\partial y}\left(x_0,y_0\right),$$

$$c=\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0,y_0\right),\; d=\frac{\partial Q}{\partial y}\left(x_0,y_0\right). \tag{6.6}$$

Если $u=0$, $v=0$ – невырожденное положение равновесия линеаризованной системы (6.5), то фазовые траектории автономной системы (6.1), при большей гладкости функций *P* и *Q*, ведут себя в окрестности положения равновесия $x=x_0$, $y=y_0$ качественно так же, как и фазовые траектории системы (6.5).

6.3. Литература

1. *Ипатова В.М., Пыркова О.А., Седов В.Н.*. Дифференциальные уравнения. Методы решений: - Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2012. (§7)
2. *Пиголкина Т.С.* Автономные системы. Фазовые траекториию Элементы теории устойчивости: Уч.-метод. пособие. – М.: МФТИ, 2013. – 40 с.
3. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. (Гл. 7 §2).
4. *Сборник* задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /Под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. (Гл. 4 §13).
5. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007. (Гл. 4 §21).
6. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979, 1985, 1992. (§16)

6.4. Примеры решения задач, предлагавшихся на экзаменационных контрольных работах в МФТИ

Пример 6.1. Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории линеаризованных систем $\begin{cases} \dot{x} = x \operatorname{arctg}\left(1-y^2\right), \\ \dot{y} = \ln \dfrac{y}{x}. \end{cases}$.

① Здесь $P(x,y) = x \operatorname{arctg}\left(1-y^2\right)$, $Q(x,y) = \ln \dfrac{y}{x}$. Положения равновесия определяем из системы уравнений $\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \operatorname{arctg}\left(1-y^2\right) = 0, \\ \ln \dfrac{y}{x} = 0. \end{cases}$ Решая ее, находим $\begin{cases} y = \pm 1 \\ y = x \end{cases}$. Таким образом, получаем два положения равновесия:

при $y=1$ и $x=1$, положение равновесия: **M(1, 1)**;

при $y=-1$ и $x=-1$, положение равновесия: **N(–1, –1)**.

<u>I способ</u>.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \operatorname{arctg}\left(1-y^2\right),\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{-2xy}{1+\left(1-y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x},\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{y}\frac{1}{x} = \frac{1}{y}.$$

Исследуем положение равновесия **M(1, 1)**.

$$\frac{\partial P(1,1)}{\partial x} = \operatorname{arctg}(1-1) = 0,\ \frac{\partial P(1,1)}{\partial y} = \frac{-2}{1+(1-1)^2} = -2,$$

$$\frac{\partial Q(1,1)}{\partial x} = -\frac{1}{1} = -1, \quad \frac{\partial Q(1,1)}{\partial y} = \frac{1}{1} = 1.$$

Линеаризованная система имеет вид $\begin{cases} \dot{x} = & -2(y-1), \\ \dot{y} = & -1(x-1)+(y-1). \end{cases}$

Находим собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ этой линеаризованной системы: $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 2 =$ $= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0$, $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$. Таким образом, положение равновесия **M(1, 1)** – седло.

Найдем собственные векторы, являющиеся ненулевыми решениями системы $(A-\lambda E)\vec{h} = 0$:

$\lambda_1 = -1$; $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 2$; $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение линеаризованной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координата точки фазовой кривой $\xi_1 = C_1 e^{-t}$ в базисе $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ стремится к нулю при $t \to \infty$, а координата $\xi_2 = C_2 e^{2t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$.

Исследуем положение равновесия **N(–1, –1)**.

$$\frac{\partial P(-1,-1)}{\partial x} = \operatorname{arctg}\left(1-(-1)^2\right) = 0, \qquad \frac{\partial P(-1,-1)}{\partial y} = \frac{-2\cdot(-1)\cdot(-1)}{1+(1-(-1))^2} = -2,$$

$$\frac{\partial Q(-1,-1)}{\partial x} = -\frac{1}{(-1)} = 1, \quad \frac{\partial Q(-1,-1)}{\partial y} = \frac{1}{(-1)} = -1.$$

Линеаризованная система имеет вид $\begin{cases} \dot{x} = & -2(y+1), \\ \dot{y} = & (x+1)-(y+1). \end{cases}$

Находим собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ этой линеаризованной системы $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1-\lambda)+2 =$ $= \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Таким образом, положение равновесия N(–1, –1) – устойчивый фокус.

На полуоси $x > -1$, $y = -1$ $\dot{y} = (x+1) > 0$, следовательно, спирали закручиваются против часовой стрелки.

На окончательной «картинке» собственные векторы в случае седла можно не обозначать, но направления собственных векторов надо выдерживать, и стрелочки на собственных направлениях, указывающие направление движения точки при возрастании времени, уточнят портрет.

Между фазовыми траекториями, соответствующими разным положениям равновесия, следует сделать зазор – они не должны пересекаться или переходить друг в друга: линеаризация в невырожденном случае дает нам адекватную картину лишь в малой окрестности положения равновесия, и ответ на вопрос о поведении фазовых траекторий на больших расстояниях от положений равновесия требует иных методов исследования.

Полученный с помощью линеаризации фазовый портрет системы представлен на рис. 6.4.

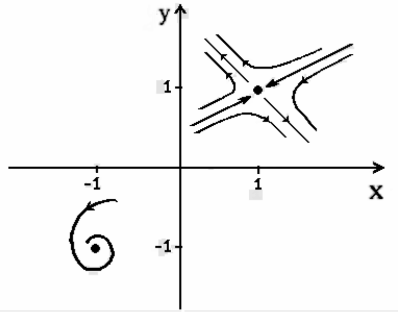


Рис. 6.4

<u>II способ</u>.

Исследуем положение равновесия **M(1, 1)**. Замена $\begin{matrix} x = u + 1 \\ y = v + 1 \end{matrix}$.

Система $\begin{cases} \dot{u} = (u+1)\operatorname{arctg}\left(1 - v^2 - 2v - 1\right) \\ \dot{v} = \ln\dfrac{v+1}{u+1} = \ln(1+v) - \ln(1+u) \end{cases}$ после линеаризации

принимает вид $\begin{cases} \dot{u} = -2v \\ \dot{v} = v - u \end{cases}$.

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$.

Собственные значения: : $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$ вещественные и разных знаков – седло.

Собственные векторы $(A - \lambda E)\vec{h} = 0$:

$\lambda_1 = -1$; $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = 2\,;\ A-\lambda E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исследуем положение равновесия **N(–1, –1)**. Замена $\begin{matrix} x = u-1, \\ y = v-1. \end{matrix}$

Система $\begin{cases} \dot{u} = (u-1)\operatorname{arctg}\left(1 - v^2 + 2v - 1\right), \\ \dot{v} = \ln\dfrac{v-1}{u-1} = \ln(1-v) - \ln(1-u) \end{cases}$ после линеаризации принимает вид $\begin{cases} \dot{u} = -2v, \\ \dot{v} = u - v. \end{cases}$

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E) = 0$: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$.

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ – устойчивый фокус.

Направление закручивания: $\begin{matrix} u = \varepsilon, \\ v = 0, \end{matrix}$ $\begin{cases} \dot{u} = -2v & = 0, \\ \dot{v} = u - v & = \varepsilon \end{cases}$ – против часовой стрелки. ❶

Пример 6.2. Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем $\begin{cases} \dot{x} = & \arcsin(xy), \\ \dot{y} = & e^{x+2y-3} - 1. \end{cases}$.

② Здесь $P(x, y) = \arcsin(xy)$, $Q(x, y) = e^{x+2y-3} - 1$. Положения равновесия находим из системы уравнений $\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \arcsin(xy) = 0, \\ e^{x+2y-3} - 1 = 0, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} xy = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$ Решая ее, находим $(3 - 2y)y = 0$. Таким образом, получаем два положения равновесия:

при $y = \frac{3}{2}$ имеем $x = 0$, положение равновесия: **M(0, $\mathbf{\frac{3}{2}}$)**;

при $y = 0$ имеем $x = 3$, положение равновесия: **N(3, 0)**.

Исследуем положение равновесия **M(0, $\mathbf{\frac{3}{2}}$)**. Замена $\begin{matrix} x = u, \\ y = v + \frac{3}{2}. \end{matrix}$

Система $\begin{cases} \dot{u} = \arcsin\left(uv + \frac{3}{2}u\right), \\ \dot{v} = e^{u+2v+3-3} - 1 \end{cases}$ после линеаризации принимает вид $\begin{cases} \dot{u} = \frac{3}{2}u, \\ \dot{v} = u + 2v. \end{cases}$

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)(2 - \lambda) = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ и $\lambda_2 = 2$ различные, вещественные, положительные (одного знака) – неустойчивый узел.

Собственные векторы $(A-\lambda E)\vec{h}=0$:

$$\lambda_1=\frac{3}{2};\ A-\lambda E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix};\ \vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix};$$

$$\lambda_2=2;\ A-\lambda E=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \vec{h}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Исследуем положение равновесия **N(3, 0)**. Замена $\begin{matrix}x=u+3,\\ y=v.\end{matrix}$

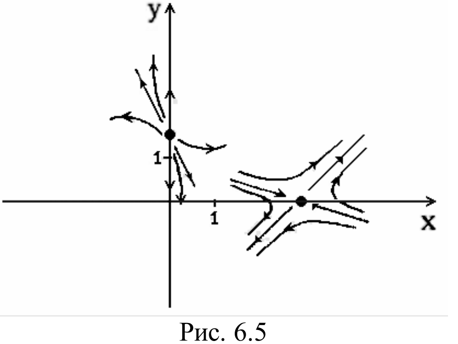


Рис. 6.5

Система $\begin{cases}\dot{u}=\arcsin(uv+3v),\\ \dot{v}=e^{u+3+2v-3}-1\end{cases}$ после линеаризации принимает вид $\begin{cases}\dot{u}=3v,\\ \dot{v}=u+2v.\end{cases}$

Матрица линеаризованной системы $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 3\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$ вещественные и разных знаков – седло.

Собственные векторы $(A - \lambda E)\vec{h} = 0$:

$\lambda_1 = -1$; $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 3$; $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ❷