2003/2004 32

6⑦ Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\mathrm{Ln}\dfrac{2-iz}{z-1}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\left\{z:|z|=1,\ 0\le\arg z\le\dfrac{3\pi}{2}\right\}\cup[-2i,-i]$ такая, что $\mathrm{Im}\,h(\infty)=\dfrac{3\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл $J=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{h(z)}{\sin^3 z}dz$.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 81 – 119 (пример 8 стр. 108-110, пример 10 стр. 111-113, пример 11 стр. 113-116), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115, пример 3 стр. 104-105

① Прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\mathrm{Ln}\dfrac{2-iz}{z-1}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\setminus\gamma$, что легко проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая удовлетворяет условию $\mathrm{Im}\,h(\infty)=\dfrac{3\pi}{2}$:

$$h(z)=\ln\left|\frac{2-iz}{z-1}\right|+i\left(\varphi_{01}-\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)-\Delta_\gamma\arg(z-1)+2\pi l\right)\to\mathrm{Im}\,h(\infty)=\varphi_{01}-\varphi_{02}+2\pi l=\frac{3\pi}{2}.$$

$$\boxed{h(z)=\ln\left|\frac{2-iz}{z-1}\right|+i\left(\frac{3\pi}{2}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)-\Delta_\gamma\arg(z-1)\right)}\ - \qquad (1)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию $\mathrm{Im}\,h(\infty)=\dfrac{3\pi}{2}$.

③ $$\boxed{h(0)}=\ln\left|\frac{2-i0}{0-1}\right|+i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-(-\pi)\right)=\boxed{\ln 2+i3\pi}$$

④ Находим особые точки $f(z)=\dfrac{h(z)}{\sin^3 z}$.

Особыми точками являются: $z=\infty$ - НОТ,

особые точки числителя: $\varnothing$,

нули знаменателя: $z=\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ - П[3] (полюсы 3-го порядка)[3]

$$\sin^3\pi k=0,\ \left(\sin^3 z\right)'\Big|_{z=\pi k}=3\sin^2 z\cos z\Big|_{z=\pi k}=0,$$

$$\left(\sin^3 z\right)''\Big|_{z=\pi k}=\left(3\sin^2 z\cos z\right)'\Big|_{z=\pi k}=\left(6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z\right)\Big|_{z=\pi k}=0,$$

---

[1] $$\mathrm{Ln}\frac{2-iz}{z-1}=\mathrm{Ln}(2-iz)-\mathrm{Ln}(z-1)=\ln|2-iz|+i\left(\varphi_{01}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)+2\pi k_1\right)-\ln|z-1|-i\left(\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(z-1)+2\pi k_2\right)$$
$$=\ln\left|\frac{2-iz}{z-1}\right|+i\left(\varphi_{01}-\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)-\Delta_\gamma\arg(z-1)+2\pi l\right)$$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\ne0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

$$\left(\sin^3 z\right)''\Big|_{z=\pi k} = \left(6\sin z\cos^2 z - 3\sin^3 z\right)'\Big|_{z=\pi k} =$$
$$\left(6\cos^3 z - 12\sin^2 z\cos z - 9\sin^2 z\cos z\right)\Big|_{z=\pi k} = (-1)^k 6 \neq 0$$

особые точки знаменателя: $\varnothing$.

Внутри контура $\gamma = \left\{z : |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}\right\} \cup [-2i, -i]$ находится: $z = 0$ - П[3].

⑤ Интеграл $J = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{\sin^3 z} dz$, можно вычислить по формуле $J = 2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z}\right)$[4].

⑥ Точка $z = 0$ - П[3] (полюс 3-го порядка), поэтому вычет[5] в этой точке равен $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 \frac{h(z)}{\sin^3 z}\right)$. ☹

Кроме того, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z} = c_{-1}$[6], где c_{-1} - коэффициент разложения функции $\frac{h(z)}{\sin^3 z}$ в ряд Лорана с центром в конечной точке $z = 0$ при $\frac{1}{z}$.

$$h(z) = \operatorname{Ln}\frac{2-iz}{z-1} = \operatorname{Ln}(-2) + \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{iz}{2}\right) - \operatorname{Ln}(1-z)^{7} = \operatorname{Ln}(-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}\left(\frac{iz}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}(z)^k + i2\pi k^{\ 8}.$$

Т.к. $h(0) = \ln 2 + i3\pi$, то $h(z) = \ln 2 + i3\pi + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}\left(\frac{iz}{2}\right)^k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}(z)^k =$

$$= \ln 2 + i3\pi - \frac{iz}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{iz}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{iz}{2}\right)^3 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} o\left(z^3\right) =$$
$$= \ln 2 + i3\pi + \left(1 - \frac{i}{2}\right)z + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right)z^2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{i}{8}\right)z^3 + o\left(z^3\right).$$

---

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[5] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z - a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_{a} f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[6] $\operatorname*{res}\limits_{a} f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

[7] Многозначные функции $\operatorname{Ln}(-2)$, $\operatorname{Ln}\left(1 - \frac{iz}{2}\right)$ и $\operatorname{Ln}(1-z)$ также имеют регулярные ветви.

[8] Половинкин §9 пример 4: $h_0(z) = \ln|z| + i\arg_{\text{гл}} z$, $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$.

$h_0(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$, $z \in B_1(0)$.

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + o\left(z^4\right)\right)^3} = \frac{1}{z^3\left(1 - \frac{z^2}{6} + o\left(z^3\right)\right)^3} = \frac{1 + 3\frac{z^2}{6} + o\left(z^3\right)}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z} + o(1)$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1} = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}(\ln 2 + i3\pi)$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z} = \frac{5}{8} + \frac{\ln 2 + i3\pi}{2}$.

⑥ Окончательно $\boxed{J =} 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z}\right) = 2\pi i\left(\frac{5}{8} + \frac{\ln 2 + i3\pi}{2}\right) \boxed{= -3\pi^2 + i\pi\left(\frac{5}{4} + \ln 2\right)}$