

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2021/2022 учебный год
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Составить систему линейных уравнений, задающих линейную оболочку системы векторов

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 2.③ Найти все значения параметра α , при которых квадратичная форма $\alpha x_1^2 + (1 - 4\alpha)x_1x_2 + (3 + 4\alpha)x_2^2$ положительно определена, отрицательно определена, полуопределена, не определена?

- 3.③ Найти матрицу Грама системы векторов $1 + x$, $3x$, $-2x^2$ в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением, заданным формулой

$$(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x) dx.$$

- 4.④ Найти асимптоты, точки локального экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции $y = 2x - 5 + \frac{8}{x - 3}$.

- 5.② Найти интеграл $\int e^{3\sqrt{x-1}} dx$.

- 6.⑤ Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$, проведенных из точки $A(2; 1)$.

- 7.⑤ Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)^{5+1/x} - \sqrt{1 + 2x}}{\operatorname{tg}(x + \cos x - 1) - x}$.

- 8.④ Найти первый и второй дифференциал в точке $M(0, 3)$ функции $w = \sqrt{e^x + y}$. Разложите функцию w по формуле Тейлора в окрестности точки M до $o(x^2 + (y - 3)^2)$.

- 9.③ Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{nx^2}{n^3 + x^3} \right)$ на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.
-

- 10.④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{(1+x^2)(e^x-1)^\alpha}$ в зависимости от параметра.
-

- 11.④ Решить систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3e^t, \\ \dot{y} = 2x + 2y - 3e^t. \end{cases}$$

- 12.④ Решить дифференциальное уравнение $y' - y = 4y^2 e^{3x}$.
-

- 13.④ Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 (e^{2x}(y'^2 + 3y^2) + yy' - 6y) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-2} - e.$$

- 14.③ Найти точки локального экстремума функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением:

$$2x^2 + xy + 3y^2 + z^2 - 9x - 31y + 2z + 58 = 0.$$

- 15.④ Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$, разложив функцию $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, где $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по косинусам.
-

- 16.③ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\gamma} (y^3 - x^2y - 2 \cos x) dx + 4xy^2 dy,$$

по границе γ кругового сектора $0 \leq r \leq 2$, $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2$, где (r, φ) — полярные координаты. Обход контура против часовой стрелки.

- 17.④ Найдите объем тела, заданного неравенствами: $x^2 + y^2 \leq 2$, $z \geq 0$, $2x - 3y + z - 23 \leq 0$.
-

- 18.④ Вычислить интеграл (обход контура против часовой стрелки): $\oint_{|z-i|=4} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z(z-2)^2}$.
-

"Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено"

С положением ознакомлен: _____ (Фамилия студента)