Семестровая контрольная работа по ТФКП 2021. *Варианты 1 и 5*

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл. В журнал за работу выставляется балл, равный $\min(16; \Sigma)$, где Σ – сумма баллов за все задачи.

1. ② Функция $f(z)$ регулярна в $\mathbb{C}$, и при этом $\operatorname{Re} f(z) = -3x^2y - 4x^2 + y^3 + 4y^2$. Найдите $\operatorname{Im} f(z)$.

Ответ: $\operatorname{Im} f(z) = x^3 - 3xy^2 - 8xy + C$; $f(z) = iz^3 - 4z^2 + iC$, $C \in \mathbb{R}$.

Неверно применены условия Коши–Римана – 0 баллов за задачу;
– потеряна произвольная постоянная – снять 0.5 балла;
– выражение для $f(z)$ через z находить не требуется; оно приведено в ознакомительных целях.

---

2. ③ Разложите функцию $g(z) = \dfrac{4z^2 + 15iz - 18}{(z^2+4)(z+2i)}$ в ряд Лорана по степеням $z - i$ в кольце, содержащем точку $z_0 = -i$. Укажите границы кольца сходимости.

$$g(z) = \frac{4}{z-2i} - \frac{i}{(z+2i)^2} = \frac{4}{w-i} - \frac{i}{(w+3i)^2},\ w_0 = -2i.$$

Ответ: $g(z) = 4\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{i^k}{(z-i)^{k+1}} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{i^{k+1}(k+1)}{3^{k+2}}(z-i)^k$; кольцо $1 < |z-i| < 3$.

Получено разложение на дроби – 1 балл;
– разложена дробь с квадратом в знаменателе – 1 балл;
– разложена дробь без квадрата в знаменателе – 0.5 балла;
– найдено кольцо сходимости – 0.5 балла;
– получено разложение не в том кольце – не более 1 балла за задачу.

---

3. ③ Найдите все особые точки функции $h(z) = \dfrac{e^{iz}+i}{1+\sin z} - \dfrac{4}{2z+\pi}$ в расширенной комплексной плоскости. Укажите тип каждой из особых точек, а для полюсов также найдите их порядок.

$$\frac{e^{iz}+i}{1+\sin z} = \frac{w + o(w)}{\frac{1}{2}w^2 + o(w^3)} = \frac{2}{w} + o\left(\frac{1}{w}\right),\ w \to 0,\ \text{где } w = z + \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $z = \infty$ – НОТ, $z = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ – П1П, $z = -\dfrac{\pi}{2}$ – УОТ.

Найдена НОТ – 0.5 балла;
– найдены и обоснованы П1П – 1 балл; если при этом утверждается, что все точки серии $z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ есть П1П – баллы не снимать;
– найдена и обоснована УОТ – 1.5 балла.

---

4. ③ Используя теорию вычетов, вычислите интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{z^3}{z+3} e^{1/z}\,dz$, где Γ – окружность $|z| = 5$, ориентированная против часовой стрелки.

$$f(z) = \left(z^2 - 3z + 9 - \frac{27}{z} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right) = z^2 - 2z + \frac{13}{2} - \frac{58}{3z} + \ldots,\ z \to \infty.$$

Ответ: $-\dfrac{116\pi i}{3}$.

Интеграл выражен через вычеты во внутренней или внешней области – 1 балл;
– при подсчёте через внутреннюю область: каждый вычет оценивается в 1 балл; при этом если вычет оставлен в виде суммы ряда, он не считается найденным, баллы не добавляются;
– при подсчёте через внешнюю область: найден вычет в бесконечности – – 2 балла.

5. ④ Используя теорию вычетов, вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{17\cos 4x}{x^2-15-8i}\,dx$.

$J = \dfrac{17}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{4iz}}{z^2-15-8i}\,dz + \dfrac{17}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-4iz}}{z^2-15-8i}\,dz$. Заменяя во втором интеграле $z \to -z$, получаем, что интегралы равны. Значит, $J = 17\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{4iz}}{z^2-15-8i}\,dz = 34\pi i \mathop{res}\limits_{4+i} \dfrac{e^{4iz}}{(z+4+i)(z-4-i)} =$ $34\pi i \dfrac{e^{4i(4+i)}}{8+2i}$.

Ответ: $(1+4i)e^{16i-4}\pi$.

Интеграл разбит на сумму двух интегралов (с e^{4ix} и e^{-4ix} в числителе) – 0.5 балла;
– нули знаменателя представлены в алгебраической форме – 0.5 балла;
– нахождение каждого из двух интегралов – 1 балл;
– доказано, что интегралы равны между собой, но ни один из них не найден – 0.5 балла;
– обоснован способ вычисления интеграла с помощью леммы Жордана **хотя бы в одном случае** – 1 балл; если обоснование есть только в одном случае из двух, баллы не снимать.

---

6. ④ [Вариант 1] Используя теорию вычетов, вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\ln(5x)}{(x+3)^3}\,dx$.

$\mathop{res}\limits_{-3} \dfrac{\varphi^2(z)}{(z+3)^3} = \dfrac{1}{2}\left(\varphi^2(z)\right)''\Big|_{z=-3} = \dfrac{1-\varphi(z)}{z^2}\Big|_{z=-3} = \dfrac{1-\ln 15-\pi i}{9}$;

$\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\ln^2(5z)}{(z+3)^3}\,dz - \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{(\ln(5z)+2\pi i)^2}{(z+3)^3}\,dz = 2\pi i \dfrac{1-\ln 15-\pi i}{9}$.

Ответ: $\dfrac{\ln 15-1}{18}$.

Введён разрез и выделена регулярная ветвь логарифма в плоскости с разрезом – 0.5 балла;
– верно выбран контур интегрирования, применена теорема о вычетах к ограниченной области с **верным указанием подынтегральной функции** (т.е. логарифм в квадрате) – 1 балл;
– найден вычет – 1.5 балла;
– обосновано стремление **хотя бы одного из интегралов** по окружностям к нулю – 1 балл; если обоснование есть только в одном случае из двух, баллы не снимать.

---

6. ④ [Вариант 5] Выполнив замену $z = e^{ix}$, сведите интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{16dx}{(5+3\sin x)^2}$ к интегралу по замкнутому контуру в комплексной плоскости. Вычислите полученный интеграл при помощи теории вычетов.

$J = \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{64iz\,dz}{(3z^2+10iz-3)^2} = 2\pi i \mathop{res}\limits_{-i/3} \dfrac{64iz}{9(z+3i)^2\left(z+\frac{i}{3}\right)^2} = 2\pi i \dfrac{-64i(z-3i)}{9(z+3i)^3}\Big|_{z=-i/3}$.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{2}$.

Интеграл сведён к интегралу по замкнутому контуру в комплексной плоскости – 1 балл;
– интеграл выражен через вычеты во внешней или внутренней области – 1 балл;
– найден вычет в особой точке внутри круга – 2 балла **ИЛИ** найдены вычеты в особых точках вне круга – по 1 баллу за вычет.