СЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по вычислительной математике III курс 6 семестр ФОПФ 2017/2018, $\sum = 30$

№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

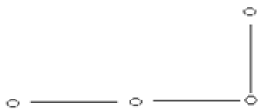
Вариант 1

1. (3). Непосредственно из определения сходимости доказать, что разностная схема $y_{n+1} = y_n(1+3\tau)$, $y_0 = -1$ сходится к решению задачи Коши $u' = 3u, u(0) = -1$.

2. (2). Найдите общее решение разностного уравнения вида $au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2} = 0$.

3. (3). Получите чисто неявный метод (или формулы дифференцирования назад) 3-го порядка точности для численного решения задачи Коши для ОДУ $\dot{u} = f(u)$, $u(0) = a = const$. Указание: использовать метод неопределенных коэффициентов.

4. (3). Получите разностную схему Бима–Уорминга для численного решения линейного уравнения переноса: $u'_t + au'_x = 0$; $a = const$ на шаблоне:

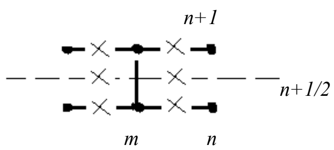


5. (3). Исследовать на сходимость схему Франкела-Дюфорта для нестационарного уравнения теплопроводности $\dfrac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} - a\dfrac{y_{m+1}^n - \left[y_m^{n+1} + y_m^{n-1}\right] + y_{m-1}^n}{h^2} = f_m^n$. В чем особенность аппроксимации этой схемы?

6. (3). Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы на сетке $D_h = \left\{(t^n, x_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_m = mh, h = const, m = 0; \pm 1; \pm 2; ...\right\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \dfrac{-3u_{m+1}^n + 4u_m^n - u_{m-1}^n}{2h} + \dfrac{-3v_{m+1}^n + 3v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n \\ \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \dfrac{-u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2h} + \dfrac{-v_{m+1}^n + 4v_m^n - 3v_{m-1}^n}{2h} = g_m^n \end{cases}$$

7. (3). Постройте разностную схему, аппроксимирующую уравнение Хопфа $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ f = \dfrac{u^2}{2}$, используя шаблон

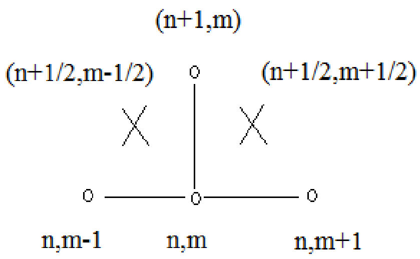


Исследуйте полученную схему на сходимость.

8. (2). Проведите аппроксимацию нелинейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ f = \frac{u^2}{2}$$

на шаблоне

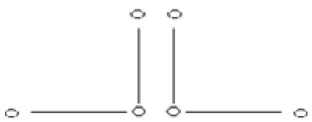


Покажите сходимость этой схемы для линейного случая
$(u = a = const)$.

9. (3). Представьте разностную схему Куранта–Изаксона–Риса для численного решения акустической системы, используя инварианты Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \qquad t \in [0,T], x \in [0,1]$$

на шаблоне:



Поставьте и аппроксимируйте начальные и граничные условия задачи.

10. (2). Представьте метод простой итерации для численного решения уравнения Лапласа на сетке $10^3 \times 10^3$ в квадрате 1×1. Определите область значений параметра, обеспечивающих сходимость метода. Вычислите значения оптимального параметра τ_0. Оцените число итераций, необходимое для численного решения этой задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. (3). Получите локально-одномерную разностную схему для численного решения 3-х мерного уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ и исследуйте ее на сходимость.

СЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по вычислительной математике III курс 6 семестр ФОПФ 2017/2018, $\sum = 30$

№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

Вариант 2

1. (2). Непосредственно из определения сходимости доказать, что разностная схема $y_{n+1} = y_n/(1+5\tau)$, $y_0 = 3$ сходится к решению задачи Коши $u' = -5u, u(0) = 3$.

2.(2). Решить неоднородное разностное уравнение

$$u_{n-1} - \frac{5}{2}u_n + u_{n+1} = 3^n,\ n = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$u_0 = -1,\ u_1 = 1.$$

3.(3). Получите неявный метод Адамса 3-го порядка аппроксимации, используя метод неопределенных коэффициентов для численного решения задачи Коши

$$\dot{u} = f(u),\ \ u(0) = a = const.$$

4. (2). Используя интегро-интерполяционный метод, представьте двухслойную неявную разностную схему для аппроксимации уравнения теплопроводности, используя 6-ти точечный шаблон:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \varphi(t, x).$$

5. (4). Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы на сетке $D_h = \left\{(t^n, x_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_m = mh, h = const, m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots\right\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \dfrac{-u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} + 2u_m^n - 2u_{m-1}^n}{2h} + \dfrac{-v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^n + 2v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n \\ \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \dfrac{-u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^n + 2u_{m-1}^n}{2h} + \dfrac{-v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1} + 2v_m^n - 2v_{m-1}^n}{2h} = g_m^n \end{cases}.$$

6. (3) Исследовать на сходимость разностную схему для волнового уравнения

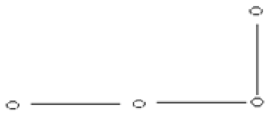
$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = a^2\left(\xi\Lambda_{xx}u_m^{n+1} + (1-2\xi)\Lambda_{xx}u_m^n + \xi\Lambda_{xx}u_m^{n-1}\right)$$ в зависимости от параметра ξ.

7. (3). Для разностной схемы вида (схема Саульева):

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a^2\dfrac{u_{m-1}^{n+1} - \left(u_m^{n+1} + u_m^n\right) + u_{m+1}^n}{h^2} = 0 \\ \dfrac{u_m^{n+2} - u_m^{n+1}}{\tau} - a^2\dfrac{u_{m-1}^{n+1} - \left(u_m^{n+2} + u_m^{n+1}\right) + u_{m+1}^{n+2}}{h^2} = 0, \end{cases}$$

укажите шаблон и какое дифференциальное уравнение в частных производных аппроксимирует разностная схема. Исследуйте схему на сходимость.

8. (3). Постройте разностную схему, аппроксимирующую линейное уравнение переноса $u_t + au'_x = 0$ на шаблоне:



Исследуйте схему на сходимость (схема Бима-Уорминга).

9. (4). Предложите схему (N+1)-го порядка аппроксимации для численного решения уравнения
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$
Поставьте начальные и граничные условия задачи.

10. (2). Представьте алгоритм численного решения уравнения Лапласа методом переменных направлений. Определите величину оптимального итерационного параметра. Оцените число итераций, необходимое для численного решения этой задачи на сетке $10^3 \times 10^3$ в квадрате 1×1 с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

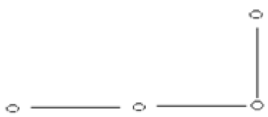
11. (3). Представьте метод расщепления по направлениям (и соответствующий алгоритм) Кранка–Никольсона для численного решения уравнения параболического типа:
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Исследуйте первый метод на сходимость.

СЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по вычислительной математике III курс 6 семестр ФОПФ 2017/2018, $\sum = 30$

№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

Вариант 3

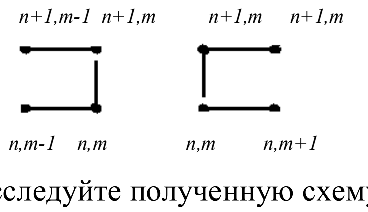
1. (2). Докажите, что из равномерной устойчивости разностной схемы вида $B\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + Au_n = f_n$ по начальным данным следует ее устойчивость по правым частям.
2. (3). Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n - 7n^2 - 4n + 3, \\ y_{n+1} = -2x_n - 5y_n + 14n^2 + 6n - 7. \end{cases}$$
3. (2). Непосредственно из определения сходимости доказать, что разностная схема $y_{n+1} = y_n + 2\tau(y_n + y_{n+1})$, $y_0 = 7$ сходится к решению задачи Коши $u' = 4u, u(0) = 7$.
4. (3). Предложите алгоритм прогонки для численного решения краевой задачи $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f(t);\ u(0) = u^0, u_t'(0) = U^0, u(1) = u^1, u_t'(1) = U^1.$
Указание: использовать прогоночное соотношение вида: $u_n = p_{n+1}\cdot u_{n+1} - q_{n+1}\cdot u_{n+2} + r_{n+1}$, и вычислить прогоночные коэффициенты p_n, q_n, r_n.
5. (3). Получите локально-одномерную разностную схему для численного решения 3-х мерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ и исследуйте ее на сходимость.
6. (3). Постройте разностную схему, аппроксимирующую линейное уравнение переноса $u_t + au_x' = 0$ на шаблоне:



.

Исследуйте схему на сходимость (схема Бима-Уорминга).

7. (3). Покажите, что разностные схемы Лакса—Вендроффа и Мак-Кормака, аппроксимирующие уравнение Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ f = u^2/2,$ совпадают в линейном случае: *f=au*, *a=const*. Исследуйте эту схему на сходимость при *f=au*, *a=const*.
8. (3). Постройте разностную схему, аппроксимирующую линейное уравнение переноса $u_t' + au_x' = 0$ на шаблоне



Исследуйте полученную схему на сходимость (схема Бабенко).

9. (3). Исследовать на сходимость разностную схему для уравнения теплопроводности $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=a^2\left(\xi\Lambda_{xx}u_m^{n+1}+\left(1-\xi\right)\Lambda_{xx}u_m^n\right)$ в зависимости от параметра ξ.

10. (3). Представьте разностную схему Лакса–Вендроффа для численного решения одномерной акустической системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial p}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=0, \end{cases} \quad \mathrm{t}\in\left[0,T\right], x\in\left[0,1\right].$$

Поставьте и аппроксимируйте начальные и граничные условия задачи.

11. (2). Представьте метод простой итерации для численного решения уравнения Лапласа на сетке $10^3\times10^3$ в квадрате 1×1. Определите область значений параметра, обеспечивающих сходимость метода. Вычислите значения оптимального параметра τ_0. Оцените число итераций, необходимое для численного решения этой задачи с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

СЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по вычислительной математике III курс 6 семестр ФОПФ 2017/2018, $\sum = 30$

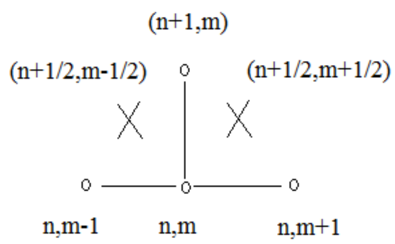
№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

Вариант 4

1. (2). Непосредственно из определения сходимости доказать, что разностная схема $y_{n+1} = y_n(1-2\tau)$, $y_0 = 5$ сходится к решению задачи Коши $u' = -2u, u(0) = 5$.
2. (2). Решить неоднородное разностное уравнение
$$u_{n-1} - \frac{5}{2}u_n + u_{n+1} = 3^n, n = 0, \pm 1, ...;$$
$$u_0 = -1, u_1 = 1.$$
3. (3). Получите явный и неявный методы Адамса, используя метод неопределенных коэффициентов для численного решения задачи Коши $\dot{u} = f(u)$, $u(0) = a = const$ 2-порядка аппроксимации.
4. (3). Постройте разностную схему, аппроксимирующую линейное уравнение переноса $u_t + au'_x = 0$ на шаблоне:

Исследуйте схему на сходимость (схема Бима-Уорминга).

5. (3). Представьте алгоритм численного решения краевой задачи нелинейного уравнения теплопроводности вида
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right]; \ \alpha; \ t \in [0, \infty], \ x \in [0, X], \ u(0, x) = 0; \ u(t, 0) = 1; \ u(t, x) = 0.$$
Указание: использовать интегро-интерполяционный метод и 6-ти точечный шаблон для неявной 2-хслойной схемы.
6. (3). Проведите аппроксимацию нелинейного уравнения переноса:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, f = \frac{u^2}{2}$$
на шаблоне



Покажите сходимость этой схемы для линейного случая
$(u = a = const)$.

7. (4). Предложите схему (N+1)-го порядка аппроксимации для численного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

8. (2). Нарисуйте шаблон заданной разностной схемы:

1-й этап.

$$\frac{\tilde{u}_m-u_m^n}{2\tau/3}+\frac{f_{m+1}^n-f_m^n}{h}=0$$

$$\frac{\tilde{u}_{m-1}-u_{m-1}^n}{2\tau/3}+\frac{f_m^n-f_{m-1}^n}{h}=0$$

(аналогично рассчитываются значения $\tilde{u}_{m-2},\tilde{u}_{m+1}$).

2-ой этап.

$$\frac{\tilde{\tilde{u}}_m-\frac{1}{2}\left(u_m^n+\tilde{u}_m\right)}{2\tau/3}+\frac{\tilde{f}_m-\tilde{f}_{m-1}}{2h}=0$$

$$\frac{\tilde{\tilde{u}}_{m+1}-\frac{1}{2}\left(u_{m+1}^n+\tilde{u}_m\right)}{2\tau/3}+\frac{\tilde{f}_{m+1}-\tilde{f}_m}{2h}=0$$

(аналогично рассчитываются значения $\tilde{\tilde{u}}_{m-1}$).

3-й этап.

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{3}{8}\frac{\tilde{\tilde{f}}_{m+1}-\tilde{\tilde{f}}_{m-1}}{h}+\frac{-2f_{m+2}^n+7f_{m+1}^n-7f_{m-1}^n+2f_{m-2}^n}{24h}+$$

$$+\frac{\omega}{24h^4}\left(u_{m+2}^n-4u_{m+1}^n+6u_m^n-4u_{m-1}^n+u_{m-2}^n\right)=0,$$

$\omega=const.$

Какой вид будет иметь схема в линейном случае $\left(f=au, a=const\right)$?

9. (3). Представьте схему расщепления по направлениям типа Кранка-Никольсон для численного решения 3-хмерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

и определите порядок аппроксимации.

10. (3). Исследовать на сходимость двухслойную схему для системы уравнений акустики

$$\begin{cases} u_t=v_x \\ v_t=a^2u_x+F(t,x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\sigma_2\dfrac{\mathrm{v}_m^{n+1}-\mathrm{v}_{m-1}^{n+1}}{h}+\left(1-\sigma_1\right)\dfrac{\mathrm{v}_m^n-\mathrm{v}_{m-1}^n}{h} \\ \dfrac{\mathrm{v}_m^{n+1}-\mathrm{v}_m^n}{\tau}=a^2\sigma_2\dfrac{u_{m+1}^{n+1}-u_m^{n+1}}{h}+a^2\left(1-\sigma_2\right)\dfrac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{h} \end{cases}$$

в зависимости от выбора параметров σ_1, σ_2.

11. (2). Предложите алгоритм решения уравнения Лапласа, использующий итерационный метод Якоби. Оцените число итераций, необходимое для численного решения этой задачи на сетке $10^3\times 10^3$ в квадрате 1×1 с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

СЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по вычислительной математике III курс 6 семестр ФОПФ 2017/2018, $\sum\ = 30$

№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

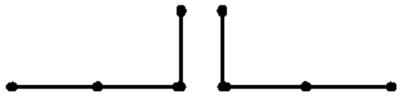
Вариант 5

1. (2). Непосредственно из определения сходимости доказать, что разностная схема $y_{n+1} = y_n - \tau(y_n + y_{n+1})$, $y_0 = -2$ сходится к решению задачи Коши $u' = -2u, u(0) = -2$.
2. (2). Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = \quad x_n - 3y_n + 7\cdot 3^n - 15, \\ y_{n+1} = 4x_n - 7y_n + 2\cdot 3^n - 28. \end{cases}$$
3. (3). Получите для численного решения задачи Коши $\dot{u} = f(u)$, $u(0) = a = const$ явный метод Адамса 3-го порядка аппроксимации. Указание: использовать метод неопределенных коэффициентов.
4. (2). Покажите, что система уравнений
$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u} = f(u,v) \\ \dot{v} = g(u,v), \text{где } 0 < \varepsilon << 1, \|f\|, \|g\| = \mathcal{O}(1) \end{cases}$$
является жесткой.
Представьте явный и неявный методы Эйлера для ее решения. В чем их достоинства и недостатки?
5. (3). Представьте метод расщепления по направлениям (и соответствующий алгоритм) Кранка–Никольсона для численного решения уравнения параболического типа:
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Исследуйте первый метод на сходимость.
6. (3). Исследуйте на сходимость разностную схему Ричардсона $\dfrac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \Lambda_{xx} u_m^n$, аппроксимирующую уравнение $u'_t = u''_{xx}$.
7. (3). Нарисуйте шаблон заданной разностной схемы.

предиктор
$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_m - u_m^n}{\tau} + \dfrac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, \\ \dfrac{\tilde{u}_{m-1} - u_{m-1}^n}{\tau} + \dfrac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0, \end{cases}$$

корректор
$$\left\{ \dfrac{u_{m-1}^{n+1} - \dfrac{u_m^n + \tilde{u}_m}{2}}{\tau} + \dfrac{\tilde{f}_m - \tilde{f}_{m-1}}{2h} = 0, \quad f = \dfrac{u^2}{2}. \right.$$

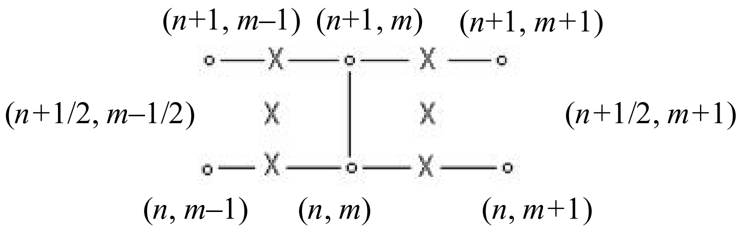
Получите условие устойчивости и порядок аппроксимации в линейном случае:
f=au,
a=const.
Какое дифференциальное уравнение в частных производных аппроксимирует эта схема?

8. (3). Постройте разностную схему, аппроксимирующую линейное уравнение переноса $u'_t + au'_x = 0$ на шаблоне  , используя его характеристические свойства (схема Бима — Уорминга).

9. (3). Постройте схему, аппроксимирующую уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ f = -a(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

с помощью интегро-интерполяционного метода, используя шаблон:



10. (3). Представьте разностную схему Куранта — Изаксона— Риса (“уголок”) в инвариантах Римана $\left(u + \frac{p}{\rho c}, u - \frac{p}{\rho c}\right)$ для численного решения одномерной акустической системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad t \in [0, T], x \in [0,1].$$

Поставьте и аппроксимируйте начальные и граничные условия задачи.

11. (3). Предложите алгоритм решения уравнения Лапласа, использующий итерационный метод Зейделя. Оцените число итераций, необходимое для численного решения этой задачи на сетке $10^3 \times 10^3$ в квадрате 1×1 с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.