ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ, ФУПМ 2016/2017
по вычислительной математике III курс 6 семестр

ГРУППА	ФАМИЛИЯ СТУДЕНТА	ДАТА	ФАМИЛИЯ ПРОВЕРЯЮЩЕГО	ОЦЕНКА
		25.04		

Вариант 1

КВ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

КВ. (3б.) Записать систему уравнений акустики в инвариантах Римана. Привести выражения для инвариантов Римана. Записать схему Куранта-Изаксона-Рис для системы, записанной в инвариантах Римана.

1. (4б.) Напрямую из определения сходимости доказать, что решение разностной задачи $y_{n+1} = y_n(1+3\tau)$, $y_0 = -1$ сходится к решению задачи Коши $u'(t) = 3u(t),\ u(0) = -1,\ 0 < t \leqslant 1$.

2. (3б.) Найти общее решение системы разностных уравнений $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n - 2y_n, \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n. \end{cases}$

3. (4б.) Методом неопределенных коэффициентов получить явный метод Адамса третьего порядка для решения задачи Коши $u' = f(t, u(t)), u(0) = u_0$. Условия порядка для линейных многошаговых методов считать известными.

4. (3б.) Для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$, определить, сколько краевых условий требуется задать слева и справа для того, чтобы постановка жесткой задачи была корректна. Собственные числа матрицы даны после задачи **9**.

$$\begin{cases} u' = -u + w \\ v' = -v + 3w \\ w' = -u + 3v - 3w \end{cases}$$

5. Дана раностная начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{p+1} - (u_{m+1}^p + u_{m-1}^p)/2}{\tau} + \frac{u_{m+1}^p + 4u_{m-1}^p - 5u_{m-2}^p}{h} = \varphi_m^p, && m = 1, \ldots, M-2;\ p = 0, \ldots, P-1; \\
&u_m^0 = \psi_m, && m = 0, 1, \ldots, M; \\
&u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, && p = 0, 1, \ldots, P-1; \\
&u_1^{p+1} = (1 - 10\tau/h)u_1^p + (9\tau/h)u_0^p + (\tau/h)u_2^p + \tau\varphi_1^p, && p = 0, 1, \ldots, P-1; \\
&u_M^{p+1} = (1 - 7\tau/h)u_M^p + (7\tau/h)u_{M-1}^p + \tau\varphi_M^p, && p = 0, 1, \ldots, P-1;
\end{aligned}$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $\varphi(t,x), \psi(x), \beta(t)$ — заданные известные функции.

(а) (3б.) Какую дифференциальную задачу и с каким порядком аппроксимирует данная разностная задача (при каких условиях?). Выписать главные члены ошибки аппроксимации.

(б) (3б.) Показать по определению, что данная краевая задача является устойчивой (при каких условиях?). Указать шаг по времени τ, с которым следует решать задачу при заданном шаге по пространству h.

(в) (2б.) Показать, что данная разностная задача является заведомо неустойчивой, если шаги τ и h измельчаются так, что $\frac{7\tau}{h} = \mathrm{const} > 2$.

6. (3б.) Дана раностная начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{p+1} - 2u_m^p + u_m^{p-1}}{\tau^2} - (a_m^p)^2 \frac{u_{m+1}^p - 2u_m^p + u_{m-1}^p}{h^2} = \varphi_m^p, && m = 1, \ldots, M-1;\ p = 0, \ldots, P-1; \\
&u_m^0 = \psi_m, \qquad \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \omega_m, && m = 0, 1, \ldots, M; \\
&u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad u_M^{p+1} = \gamma^{p+1}, && p = 0, 1, \ldots, P-1;
\end{aligned}$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $a(t,x), \psi(x), \omega(x), \beta(t), \gamma(t)$ — заданные известные функции. Провести исследование данной задачи на устойчивость с помощью спектрального признака.

Продолжение задач на обороте

7. Дана начально-краевая дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x)$$
$$u\big|_{x=0} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0.$$

(а) (2б.) Предложить аппроксимирующую и устойчивую разностную задачу (схему выбрать самостоятельно).

(б) (1б.) Указать (без исследования) порядок аппроксимации разностного уравнения, порядок аппроксимации всей задачи в целом и условие устойчивости использованной разностной схемы.

(в) (2б.) Привести алгоритм получения численного решения.

8. Для следующей дифференциальной задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(t,x,y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x,y)$$

построена следующая разностная задача (по некоторой схеме расщепления):

$$\frac{u^{p+1/2}_{m,n} - u^p_{m,n}}{\tau} = \frac{3}{5}\frac{u^p_{m+1,n} - 2u^p_{m,n} + u^p_{m-1,n}}{h^2} + \frac{4}{7}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{1}{4}\varphi^p_{m,n}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{u^{p+1}_{m,n} - u^{p+1/2}_{m,n}}{\tau} = \frac{2}{5}\frac{u^{p+1}_{m+1,n} - 2u^{p+1}_{m,n} + u^{p+1}_{m-1,n}}{h^2} + \frac{3}{7}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{3}{4}\varphi^p_{m,n}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$u^0_{m,n} = \psi_{m,n} \qquad m,n \in \mathbb{Z},$$

где $p = 0, 1, \ldots, P-1$; $P \cdot \tau = T$, а h — величина шага по пространству.

(а) (1б.) Записать задачу, используя разностные операторы вторых производных Λ_{xx} и Λ_{yy}. Получить схему с исключенным промежуточным слоем $u^{p+1/2}$.

(б) (2б.) Исследовать данную разностную задачу на устойчивость.

9. Для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_1(t,x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_2(t,x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} - 3\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_3(t,x), \\ u\big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad v\big|_{t=0} = \psi_2(x), \quad w\big|_{t=0} = \psi_3(x) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant t \leqslant T \end{array}$$

заданы следующие варианты краевых условий:

	При $x = 0$		При $x = 2$	
I)	$u + v = \beta_1(t)$;	$-u + 4v - 5w = \beta_2(t)$;	$v = \gamma_1(t)$;	
II)	$u + v = \beta_1(t)$;		$u - v = \gamma_1(t)$;	$-u + 2v + w = \gamma_2(t)$;
III)	$u - v + w = \beta_1(t)$;		$3u - v = \gamma_1(t)$;	$w = \gamma_2(t)$;
IV)	$w = \beta_1(t)$;		$3u - v = \gamma_1(t)$;	$w = \gamma_2(t)$;
V)	$3u - 2v = \beta_1(t)$;		$-2u + 3v = \gamma_1(t)$;	

(а) (3б.) Для каждого варианта краевых условий выяснить, является ли соответствующая им задача корректно поставленной (обосновать).

(б) (6б.) Выбрать корректную постановку задачи. Пусть функции $\phi, \psi, \beta, \gamma$ заданы следующим образом:

$\phi_1(t,x) = \frac{3(x+t)}{8}$, $\phi_2(t,x) = \phi_1(t,x)/3$, $\phi_3(t,x) = (x+5t-5)(5x-5t-7)$;

$\psi_1(x) = 5x - 7$, $\psi_2(x) = 3(5x-7)$, $\psi_3(x) = x(5x-7)$;

$\beta_1(t) = \frac{5t}{4}$, $\beta_2(t) = t - \frac{1}{4}$; $\gamma_1(t) = \frac{40t}{9}$, $\gamma_2(t) = -2(5t-3)$;

Найти решение этой краевой задачи (значения функций u, v, w) в точке $t = 1,\ x = 0$.

(в) (3б.) Выбрать вариант, соответствующий корректной постановке задачи и построить явную разностную краевую задачу, пригодную для нахождения значений неизвестных u, v, w в узлах расчетной сетки. Для аппроксимации одного из уравнений переноса влево использовать схему Лакса и неявный уголок для граничного узла.

(г) (2б.) Указать алгоритм решения (порядок вычислений) разностной задачи и величину шага по времени τ, с которой стоит решать задачу при заданном шаге по пространству h.

Для справки. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ имеет следующий набор левых собственных векторов и значений $\boldsymbol{\omega}_i^\top A = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^\top$:

$$\lambda_1 = -5,\ \boldsymbol{\omega}_1^\top = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -1,\ \boldsymbol{\omega}_2^\top = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 1,\ \boldsymbol{\omega}_3^\top = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ, ФУПМ 2016/2017
по вычислительной математике III курс 6 семестр

ГРУППА	ФАМИЛИЯ СТУДЕНТА	ДАТА	ФАМИЛИЯ ПРОВЕРЯЮЩЕГО	ОЦЕНКА
		25.04		

Вариант 2

КВ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

КВ. (3б.) Записать схему «кабаре» для линейного уравнения переноса $u_t + au_x = 0, a = \text{const} > 0$. Привести шаблон данной схемы. Какой порядок аппроксимации имеет схема?

1. (4б.) Напрямую из определения сходимости доказать, что решение разностной задачи $y_{n+1} = y_n/(1+5\tau)$, $y_0 = 3$ сходится к решению задачи Коши $u'(t) = -5u(t),\ u(0) = 3,\ 0 < t \leqslant 1$.

2. (3б.) Найти общее решение системы разностных уравнений $\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} = -4x_n + 5y_n. \end{cases}$

3. (4б.) Методом неопределенных коэффициентов получить неявный метод Адамса третьего порядка для решения задачи Коши $u' = f(t, u(t)), u(0) = u_0$. Условия порядка для линейных многошаговых методов считать известными.

4. (3б.) Для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$, определить, сколько краевых условий требуется задать слева и справа для того, чтобы постановка жесткой задачи была корректна. Собственные числа матрицы даны после задачи **9**.

$$\begin{cases} u' &= -9u + 7v + 2w \\ v' &= -7u + 5v \\ w' &= \ 2u \qquad\ \ + 5w \end{cases}$$

5. Дана раностная начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{p+1} - (u_{m+1}^p + u_{m-1}^p)/2}{\tau} + \frac{u_{m-1}^p + 4u_{m+1}^p - 5u_{m+2}^p}{h} = \varphi_m^p, && m = 1, \dots, M-2;\ p = 0, \dots, P-1; \\
&u_m^0 = \psi_m, && m = 0, 1, \dots, M; \\
&u_M^{p+1} = \beta^{p+1}, && p = 0, 1, \dots, P-1; \\
&u_{M-1}^{p+1} = (1 - 10\tau/h)u_{M-1}^p + (9\tau/h)u_M^p + (\tau/h)u_{M-3}^p + \tau\varphi_{M-1}^p, && p = 0, 1, \dots, P-1; \\
&u_0^{p+1} = (1 - 7\tau/h)u_0^p + (7\tau/h)u_1^p + \tau\varphi_0^p, && p = 0, 1, \dots, P-1;
\end{aligned}$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $\varphi(t,x), \psi(x), \beta(t)$ — заданные известные функции.

(а) (3б.) Какую дифференциальную задачу и с каким порядком аппроксимирует данная разностная задача (при каких условиях?). Выписать главные члены ошибки аппроксимации.

(б) (3б.) Показать по определению, что данная краевая задача является устойчивой (при каких условиях?). Указать шаг по времени τ, с которым следует решать задачу при заданном шаге по пространству h.

(в) (2б.) Показать, что данная разностная задача является заведомо неустойчивой, если шаги τ и h измельчаются так, что $\frac{7\tau}{h} = \text{const} > 2$.

6. (3б.) Дана раностная начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{2\tau} - (a_m^p)^2 \frac{u_{m+1}^p - 2u_m^p + u_{m-1}^p}{h^2} = \varphi_m^p, && m = 1, \dots, M-1;\ p = 0, \dots, P-1; \\
&u_m^0 = \psi_m, && m = 0, 1, \dots, M; \\
&u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad u_M^{p+1} = \gamma^{p+1}, && p = 0, 1, \dots, P-1;
\end{aligned}$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $a(t,x), \psi(x), \omega(x), \beta(t), \gamma(t)$ — заданные известные функции. Провести исследование данной задачи на устойчивость с помощью спектрального признака.

Продолжение задач на обороте

7. Дана начально-краевая дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \qquad \underline{c(x) < 0},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x)$$
$$u\big|_{x=1} = \beta(t).$$

(а) (2б.) Предложить аппроксимирующую и устойчивую разностную задачу (схему выбрать самостоятельно).

(б) (1б.) Указать (без исследования) порядок аппроксимации разностного уравнения, порядок аппроксимации всей задачи в целом и условие устойчивости использованной разностной схемы.

(в) (2б.) Привести алгоритм получения численного решения.

8. Для следующей дифференциальной задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(t,x,y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x,y)$$

построена следующая разностная задача (по некоторой схеме расщепления):

$$\frac{u_{m,n}^{p+1/2} - u_{m,n}^{p}}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{u_{m+1,n}^{p} - 2u_{m,n}^{p} + u_{m-1,n}^{p}}{h^2} + \frac{2}{3}\frac{u_{m,n+1}^{p+1/2} - 2u_{m,n}^{p+1/2} + u_{m,n-1}^{p+1/2}}{h^2} + \frac{1}{3}\varphi_{m,n}^{p}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^{p+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{u_{m+1,n}^{p+1} - 2u_{m,n}^{p+1} + u_{m-1,n}^{p+1}}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{u_{m,n+1}^{p+1/2} - 2u_{m,n}^{p+1/2} + u_{m,n-1}^{p+1/2}}{h^2} + \frac{2}{3}\varphi_{m,n}^{p}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$u_{m,n}^{0} = \psi_{m,n} \qquad m,n \in \mathbb{Z},$$

где $p = 0, 1, \ldots, P-1;\ P \cdot \tau = T$, а h — величина шага по пространству.

(а) (1б.) Записать задачу, используя разностные операторы вторых производных Λ_{xx} и Λ_{yy}. Получить схему с исключенным промежуточным слоем $u^{p+1/2}$.

(б) (2б.) Исследовать данную разностную задачу на устойчивость.

9. Для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 9\frac{\partial u}{\partial x} + 7\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_1(t,x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 7\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial v}{\partial x} = \phi_2(t,x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_3(t,x), \\ u\big|_{t=0} = \psi_1(x), \qquad v\big|_{t=0} = \psi_2(x), \qquad w\big|_{t=0} = \psi_3(x) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant t \leqslant T \end{array}$$

заданы следующие варианты краевых условий:

	При $x = 0$		При $x = 5$
I)	$u = \beta_1(t);$		$2v + 7w = \gamma_1(t);$
II)	$w = \beta_1(t);$		$-5u + 9v + 9w = \gamma_1(t);$
III)	$-7u + 7v + 2w = \beta_1(t);$		$v + w = \gamma_1(t);$
IV)	$w = \beta_1(t);$	$v = \beta_2(t);$	$u = \gamma_1(t);$
V)	$v = \beta_1(t);$		$7v + 2w = \gamma_1(t);$

(а) (3б.) Для каждого варианта краевых условий выяснить, является ли соответствующая им задача корректно поставленной (обосновать).

(б) (6б.) Выбрать корректную постановку задачи. Пусть функции $\phi, \psi, \beta, \gamma$ заданы следующим образом:

$\phi_1(t,x) = (x + 4t - 4)(5 - x)/5$, $\phi_2(t,x) = -t(x - 5t + 9)/3$, $\phi_3(t,x) = -7\phi_2(t,x)/2$;

$\psi_1(x) = (x-4)(x-5)/10$, $\psi_2(x) = 2x^2$, $\psi_3(x) = -7x^2$;

$\beta_1(t) = 2t$, $\beta_2(t) = 2t^2$; $\gamma_1(t) = 5(4t+1) + 705(t-1)$, $\gamma_2(t) = 4t + 2$;

Найти решение этой краевой задачи (значения функций u, v, w) в точке $t = 2,\ x = 5$.

(в) (3б.) Выбрать вариант, соответствующий корректной постановке задачи и построить явную разностную краевую задачу, пригодную для нахождения значений неизвестных u, v, w в узлах расчетной сетки. Для аппроксимации одного из уравнений переноса влево использовать схему Лакса и явный уголок для граничного узла.

(г) (2б.) Указать алгоритм решения (порядок вычислений) разностной задачи и величину шага по времени τ, с которой стоит решать задачу при заданном шаге по пространству h.

Для справки. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 2 \\ -7 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ имеет следующий набор левых собственных векторов и значений $\boldsymbol{\omega}_i^\top A = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^\top$:

$$\lambda_1 = -4,\ \boldsymbol{\omega}_1^\top = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 0,\ \boldsymbol{\omega}_2^\top = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 5,\ \boldsymbol{\omega}_3^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ, ФУПМ 2016/2017
по вычислительной математике III курс 6 семестр

ГРУППА	ФАМИЛИЯ СТУДЕНТА	ДАТА	ФАМИЛИЯ ПРОВЕРЯЮЩЕГО	ОЦЕНКА
		25.04		

Вариант 3

КВ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

КВ. (3б.) Записать разностную схему Бима-Уорминга для линейного уравнения переноса $u_t + au_x = 0, a = \text{const} > 0$. Привести шаблон данной схемы. Какой порядок аппроксимации имеет схема?

1. (4б.) Напрямую из определения сходимости доказать, что решение разностной задачи $y_{n+1} = y_n + 2\tau(y_n + y_{n+1}), y_0 = 7$ сходится к решению задачи Коши $u'(t) = 4u(t),\ u(0) = 7,\ 0 < t \leqslant 1$.

2. (3б.) Найти общее решение системы разностных уравнений $\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 2y_n, \\ y_{n+1} = 4x_n - y_n. \end{cases}$

3. (4б.) Методом неопределенных коэффициентов получить явный и неявный метод Адамса второго порядка для решения задачи Коши $u' = f(t, u(t)), u(0) = u_0$. Условия порядка для линейных многошаговых методов считать известными.

4. (3б.) Для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$, определить, сколько краевых условий требуется задать слева и справа для того, чтобы постановка жесткой задачи была корректна. Собственные числа матрицы даны после задачи **9**.

$$\begin{cases} u' = -2w \\ v' = w \\ w' = 2u + v + 4w \end{cases}$$

5. Дана раностная начально-краевая задача

$$\frac{u_m^{p+1} - (2u_{m-1}^p + u_{m+2}^p)/3}{\tau} + \frac{5u_{m-1}^p - 6u_m^p + u_{m+2}^p}{h} = \varphi_m^p, \qquad m = 1, \dots, M-2;\ p = 0, \dots, P-1;$$
$$u_m^0 = \psi_m, \qquad m = 0, 1, \dots, M;$$
$$u_M^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad p = 0, 1, \dots, P-1;$$
$$u_{M-1}^{p+1} = (1 - 9\tau/h)u_{M-1}^p + (6\tau/h)u_M^p + (3\tau/h)u_{M-2}^p + \tau\varphi_{M-1}^p, \qquad p = 0, 1, \dots, P-1;$$
$$u_0^{p+1} = (1 - 3\tau/h)u_0^p + (3\tau/h)u_1^p + \tau\varphi_0^p, \qquad p = 0, 1, \dots, P-1;$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $\varphi(t, x), \psi(x), \beta(t)$ — заданные известные функции.

(а) (3б.) Какую дифференциальную задачу и с каким порядком аппроксимирует данная разностная задача (при каких условиях?). Выписать главные члены ошибки аппроксимации.

(б) (3б.) Показать по определению, что данная краевая задача является устойчивой (при каких условиях?). Указать шаг по времени τ, с которым следует решать задачу при заданном шаге по пространству h.

(в) (2б.) Показать, что данная разностная задача является заведомо неустойчивой, если шаги τ и h измельчаются так, что $\frac{3\tau}{2h} = \text{const} > 1$.

6. (3б.) Дана раностная начально-краевая задача

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{2\tau} - (a_m^p)^2 \frac{u_{m+1}^p - u_m^{p+1} - u_m^{p-1} + u_{m-1}^p}{h^2} = \varphi_m^p, \qquad m = 1, \dots, M-1;\ p = 0, \dots, P-1;$$
$$u_m^0 = \psi_m, \qquad \frac{u_m^1 - \psi_m}{\tau} - (a_m^0)^2 \frac{\psi_{m+1} - 2\psi_m + \psi_{m-1}}{h^2} = \varphi_m^0 \qquad m = 0, 1, \dots, M;$$
$$u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad \frac{u_M^{p+1} - u_{M-1}^{p+1}}{h} = \gamma^{p+1}, \qquad p = 0, 1, \dots, P-1;$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $a(t, x), \psi(x), \omega(x), \beta(t), \gamma(t)$ — заданные известные функции. Провести исследование данной задачи на устойчивость с помощью спектрального признака.

Продолжение задач на обороте

7. Дана начально-краевая дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x)$$
$$u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = \beta(t).$$

(а) (2б.) Предложить аппроксимирующую и устойчивую разностную задачу (схему выбрать самостоятельно).

(б) (1б.) Указать (без исследования) порядок аппроксимации разностного уравнения, порядок аппроксимации всей задачи в целом и условие устойчивости использованной разностной схемы.

(в) (2б.) Привести алгоритм получения численного решения.

8. Для следующей дифференциальной задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(t,x,y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x,y)$$

построена следующая разностная задача (по некоторой схеме расщепления):

$$\frac{u^{p+1/2}_{m,n} - u^{p}_{m,n}}{\tau} = \frac{3}{4}\frac{u^{p}_{m+1,n} - 2u^{p}_{m,n} + u^{p}_{m-1,n}}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{2}{5}\varphi^{p}_{m,n}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{u^{p+1}_{m,n} - u^{p+1/2}_{m,n}}{\tau} = \frac{1}{4}\frac{u^{p+1}_{m+1,n} - 2u^{p+1}_{m,n} + u^{p+1}_{m-1,n}}{h^2} + \frac{2}{3}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{3}{5}\varphi^{p}_{m,n}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$u^{0}_{m,n} = \psi_{m,n} \qquad m,n \in \mathbb{Z},$$

где $p = 0, 1, \ldots, P-1$; $P \cdot \tau = T$, а h — величина шага по пространству.

(а) (1б.) Записать задачу, используя разностные операторы вторых производных Λ_{xx} и Λ_{yy}. Получить схему с исключенным промежуточным слоем $u^{p+1/2}$.

(б) (2б.) Исследовать данную разностную задачу на устойчивость.

9. Для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \qquad\qquad -2\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_1(t,x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} \qquad\qquad +\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_2(t,x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + 4\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_3(t,x), \\ u\big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad v\big|_{t=0} = \psi_2(x), \quad w\big|_{t=0} = \psi_3(x) \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant t \leqslant T \end{matrix}$$

заданы следующие варианты краевых условий:

	При $x = 0$		При $x = 2$
I)	$w = \beta_1(t)$;	$v - w = \beta_2(t)$;	$-2u + v = \gamma_1(t)$;
II)	$u + v - 5w = \beta_1(t)$;		$v = \gamma_1(t)$;
III)	$-v + w = \beta_1(t)$;		
IV)	$-v + w = \beta_1(t)$;	$u + v + w = \beta_2(t)$;	
V)	$w = \beta_1(t)$;	$2u - v = \beta_2(t)$;	

(а) (3б.) Для каждого варианта краевых условий выяснить, является ли соответствующая им задача корректно поставленной (обосновать).

(б) (6б.) Выбрать корректную постановку задачи. Пусть функции $\phi, \psi, \beta, \gamma$ заданы следующим образом:

$$\phi_1(t,x) = 6(x-t), \quad \phi_2(t,x) = -2\phi_1(t,x), \quad \phi_3(t,x) = (x - 3t + 1)(x - t - 1);$$
$$\psi_1(x) = 13x, \quad \psi_2(x) = 2x, \quad \psi_3(x) = -28x;$$
$$\beta_1(t) = -2t, \quad \beta_2(t) = 6t; \quad \gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = t/3;$$

Найти решение этой краевой задачи (значения функций u, v, w) в точке $t = 1,\ x = 2$.

(в) (3б.) Выбрать вариант, соответствующий корректной постановке задачи и построить явную разностную краевую задачу, пригодную для нахождения значений неизвестных u, v, w в узлах расчетной сетки. Для аппроксимации одного из уравнений переноса вправо использовать схему Лакса и неявный уголок для граничного узла.

(г) (2б.) Указать алгоритм решения (порядок вычислений) разностной задачи и величину шага по времени τ, с которой стоит решать задачу при заданном шаге по пространству h.

Для справки. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ имеет следующий набор левых собственных векторов и значений $\boldsymbol{\omega}_i^\top A = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^\top$:

$$\lambda_1 = 0,\ \boldsymbol{\omega}_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{\omega}_2^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 3,\ \boldsymbol{\omega}_3^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ, ФУПМ 2016/2017
по вычислительной математике III курс 6 семестр

ГРУППА	ФАМИЛИЯ СТУДЕНТА	ДАТА	ФАМИЛИЯ ПРОВЕРЯЮЩЕГО	ОЦЕНКА
		25.04		

Вариант 4

КВ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

КВ. (3б.) Записать разностную схему Лакса-Вендроффа для линейного уравнения переноса $u_t + au_x = 0, a = \mathrm{const}$. Привести шаблон данной схемы. Какой порядок аппроксимации имеет схема?

1. (4б.) Напрямую из определения сходимости доказать, что решение разностной задачи $y_{n+1} = y_n(1-2\tau), y_0 = 5$ сходится к решению задачи Коши $u'(t) = -2u(t),\ u(0) = 5,\ 0 < t \leqslant 1$.

2. (3б.) Найти общее решение системы разностных уравнений $\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n - 6y_n, \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n. \end{cases}$

3. (4б.) Методом неопределенных коэффициентов получить формулу дифференцирования назад второго порядка для решения задачи Коши $u' = f(t, u(t)), u(0) = u_0$. Условия порядка для линейных многошаговых методов считать известными.

4. (3б.) Для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$, определить, сколько краевых условий требуется задать слева и справа для того, чтобы постановка жесткой задачи была корректна. Собственные числа матрицы даны после задачи **9**.

$$\begin{cases} u' &= & & 2w \\ v' &= & & w \\ w' &= -2u & +v & -4w \end{cases}$$

5. Дана раностная начально-краевая задача

$$\frac{u_m^{p+1} - (u_{m-2}^p + 2u_{m+1}^p)/3}{\tau} + \frac{4u_{m+1}^p - 5u_m^p + u_{m-2}^p}{h} = \varphi_m^p, \qquad m = 2, \ldots, M-1;\ p = 0, \ldots, P-1;$$
$$u_m^0 = \psi_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, M;$$
$$u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad p = 0, 1, \ldots, P-1;$$
$$u_1^{p+1} = (1 - 8\tau/h)u_1^p + (5\tau/h)u_0^p + (3\tau/h)u_2^p + \tau\varphi_1^p, \qquad p = 0, 1, \ldots, P-1;$$
$$u_M^{p+1} = (1 - 2\tau/h)u_M^p + (2\tau/h)u_{M-1}^p + \tau\varphi_M^p, \qquad p = 0, 1, \ldots, P-1;$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $\varphi(t,x), \psi(x), \beta(t)$ — заданные известные функции.

(а) (3б.) Какую дифференциальную задачу и с каким порядком аппроксимирует данная разностная задача (при каких условиях?). Выписать главные члены ошибки аппроксимации.

(б) (3б.) Показать по определению, что данная краевая задача является устойчивой (при каких условиях?). Указать шаг по времени τ, с которым следует решать задачу при заданном шаге по пространству h.

(в) (2б.) Показать, что данная разностная задача является заведомо неустойчивой, если шаги τ и h измельчаются так, что $\frac{\tau}{h} = \mathrm{const} > 1$.

6. (3б.) Дана раностная начально-краевая задача

$$\frac{u_m^{p+1} - 2u_m^p + u_m^{p-1}}{\tau^2} - (a_m^p)^2 \frac{u_{m+1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m-1}^{p+1}}{h^2} = \varphi_m^p, \qquad m = 1, \ldots, M-1;\ p = 0, \ldots, P-1;$$
$$u_m^0 = \psi_m, \qquad \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \omega_m \qquad m = 0, 1, \ldots, M;$$
$$u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad \frac{u_M^{p+1} - u_{M-1}^{p+1}}{h} = \gamma^{p+1}, \qquad p = 0, 1, \ldots, P-1;$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $a(t,x), \psi(x), \omega(x), \beta(t), \gamma(t)$ — заданные известные функции. Провести исследование данной задачи на устойчивость с помощью спектрального признака.

Продолжение задач на обороте

7. Дана начально-краевая дифференциальная задача

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant t \leqslant T \\ &u\big|_{t=0} = \psi(x) \\ &u\big|_{x=0} = \beta(t), \quad u\big|_{x=\pi} = \gamma(t). \end{aligned}$$

(а) (2б.) Предложить аппроксимирующую и устойчивую разностную задачу (схему выбрать самостоятельно).

(б) (1б.) Указать (без исследования) порядок аппроксимации разностного уравнения, порядок аппроксимации всей задачи в целом и условие устойчивости использованной разностной схемы.

(в) (2б.) Привести алгоритм получения численного решения.

8. Для следующей дифференциальной задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(t,x,y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x,y)$$

построена следующая разностная задача (по некоторой схеме расщепления):

$$\begin{aligned} &\frac{u^{p+1/2}_{m,n} - u^p_{m,n}}{\tau} = \frac{1}{4}\frac{u^p_{m+1,n} - 2u^p_{m,n} + u^p_{m-1,n}}{h^2} + \frac{2}{3}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{3}{5}\varphi^p_{m,n}, && m,n \in \mathbb{Z}, \\ &\frac{u^{p+1}_{m,n} - u^{p+1/2}_{m,n}}{\tau} = \frac{3}{4}\frac{u^{p+1}_{m+1,n} - 2u^{p+1}_{m,n} + u^{p+1}_{m-1,n}}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{2}{5}\varphi^p_{m,n}, && m,n \in \mathbb{Z}, \\ &u^0_{m,n} = \psi_{m,n} && m,n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где $p = 0, 1, \ldots, P-1$; $P \cdot \tau = T$, а h — величина шага по пространству.

(а) (1б.) Записать задачу, используя разностные операторы вторых производных Λ_{xx} и Λ_{yy}. Получить схему с исключенным промежуточным слоем $u^{p+1/2}$.

(б) (2б.) Исследовать данную разностную задачу на устойчивость.

9. Для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \qquad\qquad +2\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_1(t,x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} \qquad\qquad\ \ +\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_2(t,x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} -2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - 4\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_3(t,x), \\ u\big|_{t=0} = \psi_1(x), \qquad v\big|_{t=0} = \psi_2(x), \qquad w\big|_{t=0} = \psi_3(x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant 3 \\ &0 \leqslant t \leqslant T \end{aligned}$$

заданы следующие варианты краевых условий:

	При $x = 0$		При $x = 3$	
I)	$u = \beta_1(t)$;	$v - w = \beta_2(t)$;	$-2u + v = \gamma_1(t)$;	
II)	$u + v - 5w = \beta_1(t)$;		$v = \gamma_1(t)$;	
III)			$-2u + v = \gamma_1(t)$;	
IV)			$u + v + w = \gamma_1(t)$;	$2u - v + w = \gamma_2(t)$;
V)			$-2u + v = \gamma_1(t)$;	$w = \gamma_2(t)$;

(а) (3б.) Для каждого варианта краевых условий выяснить, является ли соответствующая им задача корректно поставленной (обосновать).

(б) (6б.) Выбрать корректную постановку задачи. Пусть функции $\phi, \psi, \beta, \gamma$ заданы следующим образом:

$\phi_1(t,x) = 2(t-x)/15$, $\phi_2(t,x) = -2\phi_1(t,x)$, $\phi_3(t,x) = (x+3t-6)(x+t-2)$;

$\psi_1(x) = -(x-2)(x-3)/30$, $\psi_2(x) = (x-2)(x-3)/6$, $\psi_3(x) = x-2$;

$\beta_1(t) = t - \frac{1}{2}$, $\beta_2(t) = t - \frac{1}{4}$; $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = \frac{t}{3} + 1 - t$;

Найти решение этой краевой задачи (значения функций u, v, w) в точке $t = 2,\ x = 0$.

(в) (3б.) Выбрать вариант, соответствующий корректной постановке задачи и построить явную разностную краевую задачу, пригодную для нахождения значений неизвестных u, v, w в узлах расчетной сетки. Для аппроксимации одного из уравнений переноса влево использовать схему Лакса и неявный уголок для граничного узла.

(г) (2б.) Указать алгоритм решения (порядок вычислений) разностной задачи и величину шага по времени τ, с которой стоит решать задачу при заданном шаге по пространству h.

Для справки. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ имеет следующий набор левых собственных векторов и значений $\boldsymbol{\omega}_i^\top A = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^\top$:

$$\lambda_1 = -3,\ \boldsymbol{\omega}_1^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -1,\ \boldsymbol{\omega}_2^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 0,\ \boldsymbol{\omega}_3^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ, ФУПМ 2016/2017
по вычислительной математике III курс 6 семестр

ГРУППА	ФАМИЛИЯ СТУДЕНТА	ДАТА	ФАМИЛИЯ ПРОВЕРЯЮЩЕГО	ОЦЕНКА
		25.04		

Вариант 5

КВ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

КВ. (3б.) Записать схему «крест» для решения волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}, a = \text{const} > 0$. Привести шаблон схемы. Записать условие устойчивости данной схемы.

1. (4б.) Напрямую из определения сходимости доказать, что решение разностной задачи $y_{n+1} = y_n - \tau(y_n + y_{n+1})$, $y_0 = -2$ сходится к решению задачи Коши $u'(t) = -2u(t),\ u(0) = -2,\ 0 < t \leqslant 1$.

2. (3б.) Найти общее решение системы разностных уравнений $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2y_n, \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n. \end{cases}$

3. (4б.) Методом неопределенных коэффициентов получить неявный метод Адамса третьего порядка для решения задачи Коши $u' = f(t, u(t)), u(0) = u_0$. Условия порядка для линейных многошаговых методов считать известными.

4. (3б.) Для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$, определить, сколько краевых условий требуется задать слева и справа для того, чтобы постановка жесткой задачи была корректна. Собственные числа матрицы даны после задачи **9**.

$$\begin{cases} u' &= u & & +2w \\ v' &= & v & +3w \\ w' &= -2u & +3v & -3w \end{cases}$$

5. Дана раностная начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{p+1} - (u_{m-2}^p + 2u_{m+1}^p)/3}{\tau} + \frac{3u_{m+1}^p - 5u_{m-1}^p + 2u_{m-2}^p}{h} = \varphi_m^p, && m = 2, \ldots, M-1;\ p = 0, \ldots, P-1; \\
&u_m^0 = \psi_m, && m = 0, 1, \ldots, M; \\
&u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, && p = 0, 1, \ldots, P-1; \\
&u_1^{p+1} = (1 - 7\tau/h)u_1^p + (6\tau/h)u_0^p + (\tau/h)u_3^p + \tau\varphi_1^p, && p = 0, 1, \ldots, P-1; \\
&u_M^{p+1} = (1 - 4\tau/h)u_M^p + (4\tau/h)u_{M-1}^p + \tau\varphi_M^p, && p = 0, 1, \ldots, P-1;
\end{aligned}$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $\varphi(t,x), \psi(x), \beta(t)$ — заданные известные функции.

(а) (3б.) Какую дифференциальную задачу и с каким порядком аппроксимирует данная разностная задача (при каких условиях?). Выписать главные члены ошибки аппроксимации.

(б) (3б.) Показать по определению, что данная краевая задача является устойчивой (при каких условиях?). Указать шаг по времени τ, с которым следует решать задачу при заданном шаге по пространству h.

(в) (2б.) Показать, что данная разностная задача является заведомо неустойчивой, если шаги τ и h измельчаются так, что $\frac{\tau}{h} = \text{const} > 1$.

6. (3б.) Дана раностная начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{p+1} - 2u_m^p + u_m^{p-1}}{\tau^2} - (a_m^p)^2 \frac{u_{m+1}^{p-1} - 2u_m^{p-1} + u_{m-1}^{p-1}}{h^2} = \varphi_m^p, && m = 1, \ldots, M-1;\ p = 0, \ldots, P-1; \\
&u_m^0 = \psi_m, \qquad \frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \omega_m && m = 0, 1, \ldots, M; \\
&u_0^{p+1} = \beta^{p+1}, \qquad \frac{u_M^{p+1} - u_{M-1}^{p+1}}{h} = \gamma^{p+1}, && p = 0, 1, \ldots, P-1;
\end{aligned}$$

где $M \cdot h = 1, P \cdot \tau = T$, а $a(t,x), \psi(x), \omega(x), \beta(t), \gamma(t)$ — заданные известные функции. Провести исследование данной задачи на устойчивость с помощью спектрального признака.

Продолжение задач на обороте

7. Дана начально-краевая дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(x)\frac{\partial u}{\partial x} + f(t,x), \qquad \underline{c(x) > 0},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = 0$$
$$u\big|_{x=0} = \beta(t).$$

(а) (2б.) Предложить аппроксимирующую и устойчивую разностную задачу (схему выбрать самостоятельно).

(б) (1б.) Указать (без исследования) порядок аппроксимации разностного уравнения, порядок аппроксимации всей задачи в целом и условие устойчивости использованной разностной схемы.

(в) (2б.) Привести алгоритм получения численного решения.

8. Для следующей дифференциальной задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi(t,x,y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$u\big|_{t=0} = \psi(x,y)$$

построена следующая разностная задача (по некоторой схеме расщепления):

$$\frac{u^{p+1/2}_{m,n} - u^p_{m,n}}{\tau} = \frac{1}{4}\frac{u^p_{m+1,n} - 2u^p_{m,n} + u^p_{m-1,n}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{1}{2}\varphi^p_{m,n}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{u^{p+1}_{m,n} - u^{p+1/2}_{m,n}}{\tau} = \frac{3}{4}\frac{u^{p+1}_{m+1,n} - 2u^{p+1}_{m,n} + u^{p+1}_{m-1,n}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u^{p+1/2}_{m,n+1} - 2u^{p+1/2}_{m,n} + u^{p+1/2}_{m,n-1}}{h^2} + \frac{1}{2}\varphi^p_{m,n}, \quad m,n \in \mathbb{Z},$$
$$u^0_{m,n} = \psi_{m,n} \qquad m,n \in \mathbb{Z},$$

где $p = 0, 1, \ldots, P-1$; $P \cdot \tau = T$, а h — величина шага по пространству.

(а) (1б.) Записать задачу, используя разностные операторы вторых производных Λ_{xx} и Λ_{yy}. Получить схему с исключенным промежуточным слоем $u^{p+1/2}$.

(б) (2б.) Исследовать данную разностную задачу на устойчивость.

9. Для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_1(t,x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_2(t,x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} - 3\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_3(t,x), \\ u\big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad v\big|_{t=0} = \psi_2(x), \quad w\big|_{t=0} = \psi_3(x) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant T \end{array}$$

заданы следующие варианты краевых условий:

	При $x = 0$		При $x = 1$	
I)	$u = \beta_1(t)$;	$v - w = \beta_2(t)$;	$-2u + 3v = \gamma_1(t)$;	$w = \gamma_2(t)$;
II)	$u + v = \beta_1(t)$;	$-u + 4v - 5w = \beta_2(t)$;	$v = \gamma_1(t)$;	
III)	$w = \beta_1(t)$;	$-u + 3v = \beta_2(t)$;	$u + v + w = \gamma_1(t)$;	
IV)	$3u - 2v = \beta_1(t)$;	$w = \beta_2(t)$;	$-2u + 3v = \gamma_1(t)$;	
V)	$3u - 2v = \beta_1(t)$;		$-2u + 3v = \gamma_1(t)$;	

(а) (3б.) Для каждого варианта краевых условий выяснить, является ли соответствующая им задача корректно поставленной (обосновать).

(б) (6б.) Выбрать корректную постановку задачи. Пусть функции $\phi, \psi, \beta, \gamma$ заданы следующим образом:

$\phi_1(t,x) = \frac{64t}{15}\left(x - \frac{1}{4}\right)$, $\quad \phi_2(t,x) = 2\phi_1(t,x)/3$, $\quad \phi_3(t,x) = (2x - 4t + 1)(x + 4t - 1)$;

$\psi_1(x) = x/3$, $\quad \psi_2(x) = x/2$, $\quad \psi_3(x) = x/6$;

$\beta_1(t) = 4(t+1)/3 + 4(4t-1)/3$, $\quad \beta_2(t) = t^2 - \frac{t}{4}$; $\quad \gamma_1(t) = \frac{4t}{3} - \frac{13(4t-3)}{18}$, $\quad \gamma_2(t) = t$;

Найти решение этой краевой задачи (значения функций u, v, w) в точке $t = 3/4,\ x = 1$.

(в) (3б.) Выбрать вариант, соответствующий корректной постановке задачи и построить явную разностную краевую задачу, пригодную для нахождения значений неизвестных u, v, w в узлах расчетной сетки. Для аппроксимации одного из уравнений переноса влево использовать схему Лакса и явный уголок для граничного узла.

(г) (2б.) Указать алгоритм решения (порядок вычислений) разностной задачи и величину шага по времени τ, с которой стоит решать задачу при заданном шаге по пространству h.

Для справки. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ имеет следующий набор левых собственных векторов и значений $\boldsymbol{\omega}_i^\top A = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^\top$:

$$\lambda_1 = -4,\ \boldsymbol{\omega}_1^\top = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1,\ \boldsymbol{\omega}_2^\top = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 2,\ \boldsymbol{\omega}_3^\top = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$