Задача 21.1

Базарова Александра, 873 группа

17 марта 2020

Решить изопериметрическую задачу:

$$J(y) = \int_0^\pi (y')^2 dx;\ y(0) = 0,\ y(\pi) = \pi,\ \int_0^\pi y \sin x dx = 0$$

Решение

$$L = (y')^2 + \lambda y \sin x,$$

уравнение Эйлера:

$$2y'' = \lambda \sin x,$$

отсюда

$$y(x) = -\frac{1}{2}\lambda \sin x + C_1 x + C_2.$$

Тогда из начальных условий:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$y(\pi) = \pi \Rightarrow C_1 = 1.$$

Таким образом,

$$y(x) = -\frac{1}{2}\lambda \sin x + x.$$

Найдем значение параметра λ:

$$\int_0^\pi y \sin x dx = \int_0^\pi (-\frac{1}{2}\lambda \sin x + x) \sin x dx = -\frac{1}{2}\lambda \int_0^\pi \sin^2 x dx + \int_0^\pi x \sin x dx = -\frac{\lambda \cdot \pi}{4} + \pi = 0,$$

отсюда $\lambda = 4$. Итак,

$$y_0(x) = -2 \sin x + x.$$

Рассмотрим произвольную $h(x) \in C^1[0,\, \pi]$, для которой $\int_0^\pi h \sin x dx = 0$. Тогда

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_0^\pi (2y_0' h' + (h')^2) dx$$

Интегрируем по частям, $h(0) = h(\pi) = 0$, поэтому

$$\Delta J(y_0) = 2y_0' h \Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi y_0'' h dx + \int_0^\pi (h')^2 dx = -2\int_0^\pi y_0'' h dx + \int_0^\pi (h')^2 dx,$$

из уравнения Эйлера

$$\int_0^\pi y_0'' h dx = \int_0^\pi \frac{\lambda}{2} h \sin x dx = 0.$$

Поэтому

$$\Delta J(y_0) = \int_0^\pi (h')^2 dx > 0,$$

значит, найденная экстремаль реализует минимум.