2002/2003 31

4④
$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = 24y,\ \dfrac{1}{3} < r < 1,\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ u_r\big|_{r=\frac{1}{3}} = 12\cos^2\varphi,\ \ u\big|_{r=1} = 9\cos 2\varphi + 12\sin\varphi.\end{array}}$$

📖 Уроев стр. 178 – 189 (пример 1 стр. 181 –183, **пример 2** стр. 184-186)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 248 – 264
Тихонов, Самарский со стр. 328

① Сведем ДУ к **однородному** уравнению[1]:
частное решение будем искать, например, в виде:

$$u_ч = a\left(x^2+y^2\right)y \qquad \Delta u_ч = a\left(2\cdot 1 + 3\cdot 2\right)y = 24y \qquad 8a = 24 \to a = 3$$

$$\boxed{u_ч = 3\left(x^2+y^2\right)y = 3r^3\sin\varphi}\ ^{2} \qquad (1)$$

② Поставим задачу Дирихле для однородного уравнения.
Т.к. $u = u_ч + v$ (где введено обозначение $u_{од} \equiv v$ для краткости записи), т.е. $v = u - u_ч$, то

$$\left[\begin{array}{l}\Delta v = 0, \\ v_r\big|_{r=\frac{1}{3}} = 12\cos^2\varphi - 3\cdot 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\sin\varphi = 6\left(1+\cos 2\varphi\right) - \sin\varphi, \\ v\big|_{r=1} = 9\cos 2\varphi + 12\sin\varphi - 3\sin\varphi = 9\cos 2\varphi + 9\sin\varphi.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Перейдем к полярным координатам, сделав замену:
$$v\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) = V\left(r,\varphi\right).$$
Оператор Лапласа в полярной системе координат имеет вид:

$$\boxed{\Delta\bullet = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\bullet + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bullet + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet} \qquad (3)$$

③ Решение ищем МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ в виде:
$$V\left(r,\varphi\right) = R\left(r\right)\Phi\left(\varphi\right) \qquad (4)$$
Тогда
$$\Delta V = V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} = R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi = 0\ .$$
Деля на $\dfrac{1}{r^2}R\Phi$, получаем:
$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$ - постоянная разделения[3].

Отсюда получаем два уравнения:
$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \qquad (5)$$
$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \qquad (6)$$
Из гладкости исходной функции *u*, следует, что $\Phi(\varphi) \in C^2\left[0;2\pi\right]$, причем[4] $\Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$.

$\lambda < 0$, $\Phi(\varphi) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$ - периодичности нет.

$\lambda = 0$, $\Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$ - периодичность при $C_1 = 0$, период произволен.

---

[1] В данном случае это удобнее сделать в исходной (декартовой) системе координат.

[2] Нашел частное решение неоднородного уравнения: 1 очко.

[3] Чтобы функция (4) была решением ДУ (2), последнее равенство должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $\dfrac{1}{2} < r < 1$ и $0 \le \varphi < 2\pi$. Левая часть равенства является функцией только переменного *r*, а правая – только φ. Фиксируя, например, некоторое значение *r* и меняя φ (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение.

[4] При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $V\left(r,\varphi\right)$ должна вернуться к исходному значению: $V\left(r,\varphi\right) = V\left(r,\varphi+2\pi\right)$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $\Phi\left(\varphi+2\pi\right) = \Phi\left(\varphi\right)$, т.е. $\Phi\left(\varphi\right)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

$\lambda > 0$, $\Phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$ - решение периодично, но нам требуется период 2π. Учтем условия на концах:

$$\begin{cases} \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sqrt{\lambda}C_2 = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}2\pi \end{cases} \quad \to$$

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) - C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0 \\ C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) = 0 \end{cases}$$ - получили линейную однородную систему относительно C_1 и C_2.

Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$0 = \begin{vmatrix} \left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi \\ \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right) \end{vmatrix} = \left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right)^2 + \sin^2\sqrt{\lambda}2\pi \quad = 1 - 2\cos\sqrt{\lambda}2\pi + \cos^2\sqrt{\lambda}2\pi + \sin^2\sqrt{\lambda}2\pi$$

$$= 2 - 2\cos\sqrt{\lambda}2\pi \; = 2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}2\pi\right),$$

то есть $\cos\sqrt{\lambda}2\pi = 1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}2\pi = 2\pi k \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k$.

Следовательно $\lambda = k^2$, $k \in \mathrm{N}$ - собственные значения оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bullet$.

Выберем две линейно независимые собственные функции следующим образом:

$\Phi_{k,1} = \cos k\varphi$, $\Phi_{k,2} = \sin k\varphi$.

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi \qquad (7)$$

Уравнение (6) $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$ - уравнение Эйлера.

Его решение ищем в виде $R(r) = r^\alpha$.

Характеристическое уравнение: $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$.

$\alpha^2 = k^2$

$k = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$ - кратный корень (кратность 2) $R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$

$k \neq 0$, $\alpha_{1,2} = \pm k$, $R_k(r) = C_1 r^k + C_2 \dfrac{1}{r^k}$.

Решение задачи (2) ищем в виде[5]:

$$\boxed{V(r,\varphi) = C_1 + C_2 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k}\left(D_k \cos k\varphi + F_k \sin k\varphi\right)} \qquad (8)$$

④ Согласно МРП, решение ищем в виде:

$(k = 0,\ k = 1,\ k = 2)$

$$V(r,\varphi) = C_1 + C_2 \ln r + B_1 r \sin\varphi + \frac{F_1}{r}\sin\varphi + A_2 r^2 \cos 2\varphi + \frac{D_2}{r^2}\cos 2\varphi \qquad (9)$$ [6]

$$V_r(r,\varphi) = \frac{C_2}{r} + B_1 \sin\varphi - \frac{F_1}{r^2}\sin\varphi + 2A_2 r \cos 2\varphi - 2\frac{D_2}{r^3}\cos 2\varphi$$

Из ГУ: $$\begin{cases} \dfrac{C_2}{\left(\frac{1}{3}\right)} + B_1 \sin\varphi - \dfrac{F_1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\sin\varphi + 2A_2\left(\dfrac{1}{3}\right)\cos 2\varphi - 2\dfrac{D_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\cos 2\varphi = 6 - \sin\varphi + 6\cos 2\varphi, \\ C_1 + B_1 \sin\varphi + F_1 \sin\varphi + A_2 \cos 2\varphi + D_2 \cos 2\varphi = 9\cos 2\varphi + 9\sin\varphi, \end{cases}$$

или

[5] Для внутренней задачи (ЗД в круге) надо положить $C_2 = D_k = F_k = 0$, т.к. в противном случае $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $r = 0$ и не является гармонической функцией в круге;
для внешней задачи (ЗД вне круга) - $C_1 = C_2 = A_k = B_k = 0$, поскольку решение внешней задачи должно быть ограничено на бесконечности.

[6] Выписал общий вид решения в виде конечной суммы (с учетом краевых условий) или в виде ряда: 1 очко.

$$\begin{cases} 3C_2 + B_1 \sin\varphi - 9F_1 \sin\varphi + \dfrac{2}{3} A_2 \cos 2\varphi - 2\cdot 27 D_2 \cos 2\varphi = 6 - \sin\varphi + 6\cos 2\varphi, \\ C_1 + B_1 \sin\varphi + F_1 \sin\varphi + A_2 \cos 2\varphi + D_2 \cos 2\varphi = 9\cos 2\varphi + 9\sin\varphi. \end{cases}$$

Откуда получаем системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3C_2 = 6 \\ C_1 = 0 \end{cases} \to C_1 = 0,\ C_2 = 2$$

$$\begin{cases} B_1 - 9F_1 = -1 \\ B_1 + F_1 = 9 \end{cases} \to \begin{cases} 10B_1 = 81 - 1 \\ 10F_1 = 9 + 1 \end{cases} \to \begin{cases} B_1 = 8 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} A_2 - 2\cdot 27 D_2 = 6 \\ A_2 + D_2 = 9 \end{cases} \to \begin{cases} A_2 - 81D_2 = 9 \\ A_2 + D_2 = 9 \end{cases} \to \begin{cases} A_2 = 9 \\ D_2 = 0 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{V(r,\varphi) = 2\ln r + \left(8r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi + 9r^2\cos 2\varphi}$$

Ответ: $\boxed{u = 3r^3 \sin\varphi + 2\ln r + \left(8r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi + 9r^2\cos 2\varphi}$