2001/2002 23

6④
$$\Delta u = 12\left(x^2 - y^2\right),\ 1 < r < 2,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$u\big|_{r=1} = 2\sin 2\vartheta \sin\varphi + \sin^4\vartheta \cos 2\varphi,$$
$$u\big|_{r=2} = -4\sin^2 2\vartheta \cos 2\varphi.$$

Уроев стр. 263 – 291 (пример 1 стр. 287 –288, **пример 2** стр. 288-289, пример 3 стр. 289- 291)
Фарлоу. У с ЧП для научных работников и инженеров. Стр. 264 – 273
Пальцев Б.В. Сферические функции. МФТИ. Учебно-методическое пособие. Стр. 3- 49
Тихонов, Самарский. УМФ Со стр. 709

① Сведем ДУ к **однородному** уравнению[1 2]:
частное решение будем искать, например, в виде:
$u_ч = ax^4 + by^4$ $\qquad \Delta u_ч = 4\cdot 3ax^2 + 4\cdot 3ay^2 = 12\left(x^2 - y^2\right) \to a = 1,\ b = -1$ и $u_ч = x^4 - y^4$.

Перейдем к сферическим координатам:
$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \pi,$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad (1)$$
$$z = r\cos\vartheta,$$
в которой уравнение Лапласа имеет вид:
$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} + \frac{ctg\vartheta}{r^2}u_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}u_{\varphi\varphi}. \qquad (2)$$
$$\boxed{u_ч = x^4 - y^4 = r^4\sin^4\vartheta\left(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi\right)} \qquad (3)$$

② Поставим задачу Дирихле для однородного уравнения.
Т.к. в силу линейности задачи $u = u_ч + v$ (где введено обозначение $u_{од} \equiv v$ для краткости записи), т.е. $v = u - u_ч = = u - r^4\sin^4\vartheta\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = u - r^4\sin^4\vartheta\cos 2\varphi$, то
$$\left[\begin{array}{l}\Delta v = 0,\\ v\big|_{r=1} = 2\sin 2\vartheta\sin\varphi + \sin^4\vartheta\cos 2\varphi - \sin^4\vartheta\cos 2\varphi = 2\sin 2\vartheta\sin\varphi,\\ v\big|_{r=2} = -4\sin^2 2\vartheta\cos 2\varphi - 16\sin^4\vartheta\cos 2\varphi.\end{array}\right. \qquad (4)$$

③ Согласно теории, решение в сферическом (шаровом) слое формально представляется в виде суммы ряда:
$$v(r,\varphi,\vartheta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[r^k Y_k^{\mathrm{I}} + \frac{1}{r^{k+1}}Y_k^{\mathrm{II}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} r^k\left[\alpha_{0k}P_k + \sum\limits_{n=1}^{k}\left(\alpha_{nk}\cos n\varphi + \beta_{nk}\sin n\varphi\right)P_k^{(n)}\cos\vartheta\right] + \\ + \dfrac{1}{r^{k+1}}\left[\gamma_{0k}P_k + \sum\limits_{n=1}^{k}\left(\gamma_{nk}\cos n\varphi + \eta_{nk}\sin n\varphi\right)P_k^{(n)}\cos\vartheta\right]\end{array}\right\}, \qquad (5)$$
где
$P_k(t) \equiv \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dt^k}\left(t^2 - 1\right)^k$ - **полиномы Лежандра** степени k,

$P_k^{(n)}(t) \equiv P_k^n(t) \equiv P_{nk}(t) \equiv \left(1 - t^2\right)^{n/2}\dfrac{d^n}{dt^n}P_k(t)$ - **присоединенная функция Лежандра** порядка k.

④ **ШПАРГАЛКА**

Для $n = 0$: $P_k^{(0)} = P_k$, в частности,
$$P_0(t) = 1,$$
$$P_1(t) = t\cos\vartheta,$$
$$P_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(3\cos 2\vartheta + 1\right),$$
$$P_3(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right) = \frac{1}{8}\left(5\cos 3\vartheta + 3\cos\vartheta\right);$$

[1] Уравнение Пуассона сведем к уравнению Лапласа.
[2] В данном случае это удобнее сделать в исходной (декартовой) системе координат.

для $n=1$: $P_k^{(1)}(t)=\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{d}{dt}P_k(t)$, в частности,

$$P_1^{(1)}(t)=\sqrt{1-t^2}=\sin\vartheta,$$

$$P_2^{(1)}(t)=3t\sqrt{1-t^2}=\frac{3}{2}\sin 2\vartheta;$$

для $n=2$: $P_k^{(2)}(t)=\left(1-t^2\right)\dfrac{d^2}{dt^2}P_k(t)$, в частности,

$$P_k^{(2)}(t)=3\left(1-t^2\right)=\frac{3}{2}\left(1-\cos 2\vartheta\right)=3\sin^2\vartheta.$$

⑤ Разложим ГУ по полиномам и присоединенным функциям Лежандра:

$\underline{n=1}$ $\quad v\big|_{r=1}=2\sin 2\vartheta\sin\varphi=2\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{2}\sin 2\vartheta\right)\sin\varphi=\dfrac{4}{3}P_2^1\sin\varphi,$

$\underline{n=2}$ $\quad v\big|_{r=2}=-4\sin^2 2\vartheta\cos 2\varphi-16\sin^4\vartheta\cos 2\varphi=-4\left[\left(2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)^2+4\sin^4\vartheta\right]\cos 2\varphi$

$$=-16\sin^2\vartheta\left[\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right]\cos 2\varphi=-16\sin^2\vartheta\cos 2\varphi=-\frac{16}{3}\left(3\sin^2\vartheta\right)\cos 2\varphi=-\frac{16}{3}P_2^{(2)}\cos 2\varphi.$$

⑥ Решение (4) будем искать в виде:

$$v=r^2\beta_{12}P_2^{(1)}\sin\varphi+\frac{1}{r^3}\eta_{12}P_2^{(1)}\sin\varphi+r^2\alpha_{22}P_2^{(2)}\cos 2\varphi+\frac{1}{r^3}\gamma_{22}P_2^{(2)}\cos 2\varphi \tag{6}$$

Из ГУ: $\begin{cases}\beta_{12}P_2^{(1)}\sin\varphi+\eta_{12}P_2^{(1)}\sin\varphi+\alpha_{22}P_2^{(2)}\cos 2\varphi+\gamma_{22}P_2^{(2)}\cos 2\varphi=\dfrac{4}{3}P_2^1\sin\varphi,\\ 4\beta_{12}P_2^{(1)}\sin\varphi+\dfrac{1}{8}\eta_{12}P_2^{(1)}\sin\varphi+4\alpha_{22}P_2^{(2)}\cos 2\varphi+\dfrac{1}{8}\gamma_{22}P_2^{(2)}\cos 2\varphi=-\dfrac{16}{3}P_2^{(2)}\cos 2\varphi.\end{cases}$

Постоянные β_{12}, η_{12}, α_{22}, γ_{22} получем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}\beta_{12}+\eta_{12}=\dfrac{4}{3}\\ 4\beta_{12}+\dfrac{1}{8}\eta_{12}=0\end{cases}\to\begin{cases}\beta_{12}+\eta_{12}=\dfrac{4}{3}\\ 32\beta_{12}+\eta_{12}=0\end{cases}\to\begin{cases}31\beta_{12}=-\dfrac{4}{3}\\ \eta_{12}=-32\beta_{12}\end{cases}\to\begin{cases}\beta_{12}=-\dfrac{4}{93}\\ \eta_{12}=32\dfrac{4}{93}=\dfrac{128}{93}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_{22}+\gamma_{22}=0\\ 4\alpha_{22}+\dfrac{1}{8}\gamma_{22}=-\dfrac{16}{3}\end{cases}\to\begin{cases}\alpha_{22}+\gamma_{22}=0\\ 32\alpha_{22}+\gamma_{22}=-\dfrac{128}{3}\end{cases}\to\begin{cases}31\alpha_{22}=-\dfrac{128}{3}\\ \gamma_{22}=-\alpha_{22}\end{cases}\to\begin{cases}\alpha_{22}=-\dfrac{128}{93}\\ \gamma_{22}=\dfrac{128}{93}\end{cases}$$

Таким образом:

$$v=-\frac{4}{93}r^2P_2^{(1)}\sin\varphi+\frac{1}{r^3}\frac{128}{93}P_2^{(1)}\sin\varphi-r^2\frac{128}{93}P_2^{(2)}\cos 2\varphi+\frac{1}{r^3}\frac{128}{93}P_2^{(2)}\cos 2\varphi=$$

$$=\frac{4}{93}\left[\frac{32}{r^3}-r^2\right]\left(\frac{3}{2}\sin 2\vartheta\right)\sin\varphi+\frac{128}{93}\left[\frac{1}{r^3}-r^2\right]\left(3\sin^2\vartheta\right)\cos 2\varphi$$

$$\boxed{v(r,\varphi,\vartheta)=\frac{2}{31}\left[\frac{32}{r^3}-r^2\right]\sin 2\vartheta\sin\varphi+\frac{128}{31}\left[\frac{1}{r^3}-r^2\right]\sin^2\vartheta\cos 2\varphi}$$

Ответ: $\boxed{u=r^4\sin^4\vartheta\left(\cos^4\varphi-\sin^4\varphi\right)+\dfrac{2}{31}\left[\dfrac{32}{r^3}-r^2\right]\sin 2\vartheta\sin\varphi+\dfrac{128}{31}\left[\dfrac{1}{r^3}-r^2\right]\sin^2\vartheta\cos 2\varphi}$